SUITES

Les notions indispensables

GÉNÉRALITÉS

Définition

Une **suite** est une fonction u définie de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (ou d'une partie I de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

Notations : • $u : n \mapsto u_n$.

• La suite se note u ou encore (u_n).

• Le réel u_n est le terme de rang n de la suite.

• Le terme initial est u_o ou u_1 selon les cas.

Une suite peut se définir de plusieurs façons, les deux plus courantes étant la définition **explicite** et la définition **par récurrence**.

Exemple 1 : suite (v_n) définie de façon explicite

Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{n-5}{2}$. Le terme général v_n est exprimé en fonction de n. Tout terme de la suite s'obtient alors en remplaçant n par l'indice souhaité. Ainsi, $v_{21} = \dfrac{21-5}{2} = 8$.

Exemple 2 : suite (w_n) définie par récurrence

$\begin{cases} w_0 = 5 \\ \text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ w_{n+1} = 2w_n - 1 \end{cases}$. À partir du terme initial, on peut déterminer de proche en proche les termes de la suite. Ainsi, $w_1 = 2w_0 - 1 = 10 - 1 = 9,\ w_2 = 2w_1 - 1 = 17,\ ,w_3 = 2w_2 - 1 = 33,$ etc.

Sens de variation d'une suite

Soit (u_n) une suite définie sur l'ensemble I (partie de $\mathbb{N}$).

• (u_n) est dite **croissante** sur I si pour tout n de I, $u_n \leq u_{n+1}$.

• (u_n) est dite **décroissante** sur I si pour tout n de I, $u_n \geq u_{n+1}$.

SUITES GÉOMÉTRIQUES

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que, pour tout entier n de I (partie de $\mathbb{N}$), $u_{n+1} = u_n \times q$.
Chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par la constante q.
Le réel q s'appelle la **raison** de la suite.

Formules explicites

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$.
Sous réserve que la suite soit définie, on a :
- pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$
  ou $u_n = u_1 \times q^{n-1}$;
- pour tous n et p de $\mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Sens de variations d'une suite géométrique

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$.
- Si $q > 1$, alors (u_n) est strictement croissante.
- Si $q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$, alors (u_n) est constante.

Limite d'une suite géométrique

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q.
- Si $0 \leq q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : Soit un réel $q \neq 1$. La somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique (q^n) vaut : $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Conséquence : (u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$. La somme des $(n+1)$ premiers termes vaut : $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

ALGORITHMES

Au baccalauréat, les exercices sur les suites peuvent comporter des algorithmes écrits en langage naturel (c.-à-d. en français, par opposition à un langage de programmation).

Un **algorithme** est une suite finie d'instructions données dans un ordre précis et permettant de mener à bien une tâche ou un calcul.

Exemple :

Algorithme	*Explications :*
Variables n : un nombre entier naturel q et S : des nombres réels	Trois emplacements pour stocker des nombres.
Initialisation Affecter à q la valeur 2 Saisir n	$q = 2$ Si on choisit pour n la valeur 4, alors la variable
Traitement Affecter à S la valeur $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$	S prend pour valeur $\dfrac{1-2^5}{1-2}$.
Sortie Afficher S	L'algorithme affiche la valeur 31 pour S.

Après la déclaration des **variables** qui permettent de stocker le plus souvent des nombres entiers ou réels…, l'algorithme se compose généralement de trois phases :

- l'**initialisation** permet d'affecter ou de saisir des valeurs à certaines variables ;
- le **traitement** se compose d'une série d'instructions de calculs sur les variables déclarées ;
- la **sortie** affiche les valeurs de certaines variables.

L'affichage de commentaires peut rendre l'algorithme plus lisible.

La phase de traitement peut comporter des **instructions conditionnelles** ou des **boucles** (cf. les descriptifs ci-après).

Instruction conditionnelle

Si *condition*
  Alors *tâche 1*
  Sinon *tâche 2*
Fin Si

Pour résoudre certains problèmes, il faut vérifier une **condition** donnée :
- **si** la condition est vérifiée, on effectue une tâche ;
- **sinon** on effectue une autre tâche.

Remarque : le “sinon” n'est pas obligatoire. Si on ne le met pas, la 1re tâche n'est pas effectuée et l'algorithme passe à l'instruction suivante.

Boucle itérative

Pour i **variant de** 1 **à** n faire   tâches **Fin Pour**

Une itération permet de répéter plusieurs fois de suite les mêmes tâches.
Le nombre d'itérations n est connu à l'avance.

Exemple :

[...]
        Saisir N
Traitement & sortie
        Pour i variant de 0 à 10 faire
            Afficher $N \times i$
        Fin Pour

Explications :
On choisit $N = 5$.

L'algorithme affichera les multiples de 5 (de 0 à 50).

On peut dresser un tableau dont les lignes contiennent les différentes valeurs des variables utilisées dans la boucle.

i	0	1	2	$\ldots$	10
N	$5\times0=0$	$5\times1=5$	$5\times2=10$	$\ldots$	$5\times10=50$

Boucle conditionnelle

Tant que condition faire   tâches **Fin Tant que**

Une boucle permet de répéter plusieurs fois de suite les mêmes tâches.
Le nombre d'itérations dépend d'une condition.

Dans ce cas, les tâches sont répétées **tant que la condition est vraie**.
Lorsque la condition est fausse, on sort de la boucle.

Exemple :

[...]
        U prend la valeur 5
Traitement & sortie
        Tant que $U \leq 100$ faire
            Afficher U
            U prend la valeur $U \times 2$
        Fin Pour

Explications :
U prend la valeur initiale 5.
L'algorithme affiche les réels 5, 10, 20, 40 et 80.
La dernière valeur de U qui est 160 n'est pas affichée car $160 > 100$.

On peut dresser un tableau dont les lignes contiennent les différentes valeurs des variables et la condition utilisées dans la boucle.

U	5	$5\times2=10$	$10\times2=20$	40	80	160
Test $U \leq 100$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

Les annales

NOUVELLE-CALÉDONIE - MARS 2014

L'iode 131 est un produit radioactif utilisé en médecine. II peut cependant être dangereux lorsqu'on le reçoit en grande quantité.
On considère un échantillon d'une population de noyaux d'iode 131 comportant 10^6 noyaux au début de l'observation.
On considère que le nombre de noyaux diminue chaque jour de 8,3 %.
On note u_n le nombre de noyaux de cet échantillon au bout de n jours. On a donc $u_0 = 10^6$.

1. Calculer u_1 puis u_2.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Déterminer à partir de combien de jours la population de noyaux aura diminué au moins de moitié.
Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode 131.

5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et u sont des nombres
Initialisation :	Affecter la valeur 0 à n
	Affecter la valeur 10^6 à u
Traitement :	Tant que $u > \dfrac{10^6}{2}$
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $u \times 0{,}917$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a) À quoi correspond la valeur n en sortie de cet algorithme ?

b) Si on programme cet algorithme, quel résultat affiche-t-il ?

c) Pour le Césium 137, le nombre de noyaux diminue chaque année de 2,3 %. Quelles modifications faut-il apporter à l'algorithme précédent pour trouver la demi-vie du césium 137 sachant que la population au départ est de 10^8 noyaux ?

POLYNÉSIE - JUIN 2014

« *En 2009, les Français ont en moyenne produit* 374 *kg de déchets ménagers par habitant*. »
(Source Ademe)

Le maire d'une commune de 53 700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23 000 tonnes de déchets en 2009. Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux.

Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant 5 ans.

1. Justifier la déception du maire en 2009.

2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.

a) Montrer que $d_1 = 0{,}985 d_0$.

b) Déterminer la nature de la suite (d_n). Exprimer d_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite (d_n).

c) Quelle devrait être, à ce rythme-là, la production en kilogrammes de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 ?

3. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel d.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à d la valeur 400
Traitement :	Tant que $d > 374$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Affecter à d la valeur $0{,}985 \times d$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

Donner la valeur affichée pour N et interpréter ce résultat.

MÉTROPOLE - LA RÉUNION - JUIN 2014

Au cours de son évolution, une tornade se déplace dans un corridor de quelques centaines de mètres de large sur quelques kilomètres de long.

Document 1 :

L'échelle de Fujita est une échelle servant à classer les tornades par ordre de gravité, en fonction des dégâts qu'elles occasionnent. Une partie de cette échelle est présentée dans le tableau ci-dessous.

Catégorie	Vitesse des vents en km.h^{-1}	Dégâts occasionnés
F0	60 à 120	Dégâts légers : dégâts sur cheminées, arbres, fenêtres, ...
F1	120 à 180	**Dégâts modérés :** automobiles renversées, arbres déracinés, ...
F2	180 à 250	**Dégâts importants :** toits arrachés, hangars et dépendances démolis, ...
F3	250 à 330	**Dégâts considérables :** murs extérieurs et toits projetés, maisons et bâtiments de métal effondrés, forêts abattues, ...
F4	330 à 420	**Dégâts dévastateurs :** murs effondrés, objets en acier ou en béton projetés comme des missiles, ...
F5	420 à 510	**Dégâts incroyables :** maisons rasées ou projetées sur de grandes distances, murs extérieurs et toits arrachés sur de gros bâtiments, ...

Document 2 :

À partir des mesures relevées lors d'observations de phénomènes semblables, des météorologues ont admis la règle suivante :
« la vitesse des vents dans les tornades diminue régulièrement de 10 % toutes les 5 minutes ».
On appelle « durée de vie » d'une tornade le temps nécessaire, depuis sa formation, pour que la vitesse des vents devienne inférieure à 120 km.h^{-1}.

Lors de la formation d'une tornade, on a mesuré la vitesse des vents par un radar météorologique et on a trouvé une vitesse initiale de 420 km.h^{-1}.

L'objectif de ce problème est d'estimer la durée de vie de cette tornade.
Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10 km.h^{-1}.

1.

a) Cinq minutes après la mesure initiale, la vitesse des vents est de 378 km.h^{-1}.
Vérifier que ce résultat correspond à la règle admise.
À quelle catégorie appartient la tornade à ce moment-là ?

b) Vérifier que, quinze minutes après la mesure initiale, cette tornade occasionne des dégâts classés comme « dégâts considérables ».

2. Pour déterminer la durée de vie de cette tornade, un étudiant propose de modéliser le phénomène par une suite géométrique de raison q. Il commence à élaborer l'algorithme ci-dessous.

Variables
    n : un nombre entier naturel
    v : un nombre réel
    q : un nombre réel
Initialisation
    Affecter à n la valeur 0
    Affecter à v la valeur 420
    Affecter à q la valeur 0,9
Traitement
    Tant que . . .
        . . . .
        . . . .
    Fin Tant que
Sortie
    Afficher $5 \times n$

a) Justifier la valeur 0,9 dans la phrase « Affecter à q la valeur 0,9 ».

b) Donner le premier terme et la raison de la suite géométrique proposée par l'étudiant.

c) Dans l'algorithme ci-dessus, des pointillés indiquent des parties manquantes.
Recopier la partie relative au traitement et la compléter pour que l'étudiant puisse déterminer la durée de vie de cette tornade.

d) Expliquer l'instruction « Afficher $5 \times n$ » proposée par l'étudiant.

3. On désigne par (v_n) la suite géométrique proposée par l'étudiant.
Exprimer v_n en fonction de n.

4. Déterminer la durée de vie de cette tornade au sens défini dans le document 2.

MÉTROPOLE - LA RÉUNION - SEPTEMBRE 2014

Chloé, âgée de 15 ans au 1er janvier 2014, réside dans une agglomération française. Pour anticiper le financement de son permis de conduire, elle décide de placer sur un produit d'épargne ses 600 euros d'économies à partir du 1e janvier 2014.