

Chapitre 1

Modélisation des systèmes

1 Notion de système

Nous parlerons de systèmes chaque fois que l'on sera capable, sur une entité donnée, de distinguer des entrées et des sorties liées par causalité. Par le terme de causalité, nous voulons simplement dire qu'une action sur les entrées engendre une réaction sur les sorties. Cette notion de système est donc très générale et peut s'appliquer pratiquement à tout ce qui nous entoure. Dans la suite, nous nous intéresserons essentiellement aux systèmes réalisés par l'homme, c'est-à-dire conçus pour réaliser une fonction, dite principale, bien définie.

Il est courant de représenter un système à l'aide d'un diagramme, dit diagramme fonctionnel, traduisant une relation de cause à effet entre les entrées et les sorties. La figure 1.1 fournit un exemple d'une telle représentation.

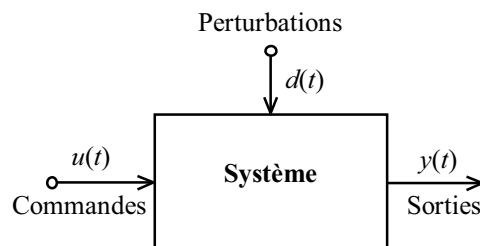


FIGURE 1.1 – Diagramme fonctionnel d'un système

Dans ce diagramme, le rectangle représente le système considéré, les flèches représentent des grandeurs physiques (tension, courant, force, vitesse...). On distingue les entrées permettant d'agir sur le système et les sorties représentant les réponses à ces sollicitations. De façon plus précise, on distingue :

- Les actions volontaires, encore appelées commandes, notées u .
- Les actions involontaires, encore appelées perturbations, notées d .
- Les réponses aux sollicitations externes (u et d), ce sont les sorties notées y .

Les grandeurs appliquées aux entrées permettent de faire évoluer le système. Les grandeurs de sortie, conséquences des entrées rendent compte de cette évolution ; mais les

entrées et les sorties à elles seules ne suffisent pas à caractériser l'évolution du système, il faut y ajouter les états. Les états sont des variables internes constituant la mémoire du système, elles condensent toute l'information sur son passé. Il suffit de connaître l'état du système à un instant initial quelconque pour prédire son comportement futur, sous l'action d'entrées connues.

2 Modèles d'un système

La synthèse d'une loi de commande et/ou d'un module de diagnostic nécessite de disposer d'un modèle du système. D'une manière générale, un modèle est une représentation abstraite permettant d'agréger l'ensemble des connaissances que l'on a du système. Les modèles considérés dans la suite sont des représentations mathématiques, permettant de calculer l'évolution des sorties du système, lorsque l'on connaît l'évolution de ses entrées et les conditions initiales de cette évolution.

La recherche d'un modèle mathématique du système étudié peut être abordée suivant deux approches distinctes. La première suppose qu'il est possible d'obtenir une description complète du système à l'aide d'un ensemble d'équations issues de l'application des lois de la physique. Le modèle ainsi obtenu est dit de connaissance ou modèle boîte blanche. La seconde approche suppose que les mécanismes internes régissant le fonctionnement du système sont complètement inconnus. L'attitude consiste alors à rechercher un ensemble de relations rendant compte simplement du comportement entrées/sorties du système étudié. Ces relations sont paramétrées au moyen d'un algorithme d'identification permettant l'adéquation modèle/système. Ce type de modèle est dit de représentation ou modèle boîte noire. Dans la pratique courante, il n'existe pas de modèle qui soit purement de connaissance ou de représentation. Les modèles généralement obtenus, combinent ces deux approches. On parle alors de modèles boîte grise. La construction d'un modèle boîte grise repose donc sur l'utilisation systématique des connaissances a priori sur le processus et des données expérimentales.

2.1 Modèle d'état ou représentation interne

Une large classe de systèmes a la propriété de pouvoir être décrite par un nombre fini de grandeurs appelées variables d'état. Ces variables permettent de déterminer les évolutions futures du système à partir des états initiaux et des grandeurs externes d'entrée. Une représentation d'état ou modèle d'état est un ensemble fini d'équations différentielles du premier ordre reliant des grandeurs scalaires, divisées en variables internes (ou variables d'état) et en variables externes comprenant les grandeurs d'entrée et de sortie. De façon plus précise, le comportement dynamique d'un système de degré n peut être décrit à l'aide de n variables indépendantes notées $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ appelées variables d'état, avec $t \in \mathbf{R}$ dans le cas continu. Les évolutions des variables d'état à partir d'un instant initial t_0 ne dépendent que des valeurs initiales $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ et des grandeurs de commande appliquées à partir de l'instant t_0 . En d'autres termes, l'état du système à un instant t quelconque ne dépend que de l'état initial (ce sont les conditions initiales) à un instant t_0 quelconque et des entrées appliquées sur l'intervalle de temps t_0 à t . Les variables d'état, aussi appelées variables internes du système, représentent l'information minimale nécessaire à la prédiction du comportement futur du système. Les variables d'état correspondent aux sorties des éléments de stockage d'énergie potentielle et cinétique, ce sont les sorties des intégrateurs du schéma de simulation analogique.

D'une manière générale, un système dynamique multivariable à temps continu de degré n peut être représenté par un système de n équations différentielles du premier ordre et p équations algébriques de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ y_1(t) = h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ y_p(t) = h_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Dans la relation (1.1), x_1 à x_n sont les variables d'état, u_1 à u_m sont les variables d'entrée (i.e. les perturbations et les commandes) et y_1 à y_p sont les grandeurs de sortie. Les fonctions f_1, \dots, f_n et h_1, \dots, h_p sont des fonctions scalaires généralement continues et dérivables. L'évolution des variables d'état du système est régie par le système d'équations différentielles 1.1 généralement non linéaire. Ce modèle d'état est dit non stationnaire, si les fonctions f_1, \dots, f_n dépendent explicitement du temps t , dans le cas contraire on parle de modèles d'état stationnaires. Dans la suite, nous écrirons le modèle d'état (1.1) sous la forme plus condensée suivante¹ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{array} \right. \quad \text{avec :} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^T(t) = [x_1(t) \quad \dots \quad x_n(t)] \\ u^T(t) = [u_1(t) \quad \dots \quad u_m(t)] \\ y^T(t) = [y_1(t) \quad \dots \quad y_p(t)] \\ f^T(x(t), u(t)) = [f_1(x(t), u(t)) \quad \dots \quad f_n(x(t), u(t))] \\ h^T(x(t), u(t)) = [h_1(x(t), u(t)) \quad \dots \quad h_p(x(t), u(t))] \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où $x(t) \in \mathbf{R}^n$ désigne le vecteur d'état de dimension n , $u(t) \in \mathbf{R}^m$ est le vecteur des entrées, de dimension m , permettant de modifier l'état du système, $y(t) \in \mathbf{R}^p$ est le vecteur de sortie de dimension p . Les champs de vecteurs $f(x(t), u(t))$ et $h(x(t), u(t))$ sont, respectivement, les fonctions d'évolution et de sortie de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ dans \mathbf{R}^n et \mathbf{R}^p respectivement. Un cas particulier, d'une grande importance pratique, est celui des systèmes linéaires. Un système est dit linéaire s'il vérifie le principe de superposition². On a dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t) \\ h(x(t), u(t)) = Cx(t) + Du(t) \end{array} \right. \quad (1.3)$$

1. Notons que cette représentation permet la prise en compte de l'influence des perturbations $d(t)$. En effet, on peut toujours poser : $u^T(t) = [d(t) \quad u_c(t)]$, où $u_c(t)$ représente le vecteur de commande.

2. Considérons k vecteurs d'entrée $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)$, et soit $y_i(t)$ la réponse du système à l'entrée $u_i(t)$ ($i = 1, \dots, k$). Le système considéré vérifie le principe de superposition, si toute entrée $u(t)$, combinaison linéaire des $u_i(t)$: $u(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i(t)$, $\forall \alpha_i \in \mathbf{R}$, provoque la sortie $y(t) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i(t)$.

où $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état ou d'évolution, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ est la matrice de sortie ou d'observation et $D \in \mathbf{R}^{p \times m}$ est la matrice de transmission directe des entrées sur les sorties. La matrice D est généralement nulle, car, pour un système réel, les sorties ne peuvent en général pas réagir instantanément aux variations des entrées.

Exemple I.1. Considérons le système de la figure 1.2, il s'agit d'un bras de robot, supposé rigide, tournant dans le plan P , autour de l'axe z qui lui est perpendiculaire. Cet axe est muni d'un moteur permettant d'appliquer un couple u variable au gré de l'utilisateur, u est la variable de commande du système. La position du bras, par rapport à la verticale, est repérée par l'angle θ . L'application du principe fondamental de la dynamique aux corps en rotation conduit à l'équation

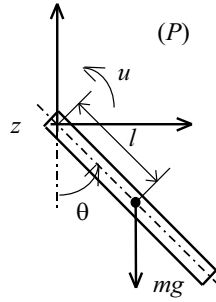


FIGURE 1.2 – Bras de robot

différentielle suivante : $J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + mgl \sin \theta(t) = u(t)$. En posant $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, on obtient un système de deux équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = \frac{1}{J}u(t) - \frac{b}{J}\omega(t) - \frac{mgl}{J} \sin \theta(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

où m est la masse du bras, J son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, l la distance du centre de gravité à l'axe, b le coefficient de frottement visqueux et g l'accélération due à la pesanteur. La position angulaire θ et la vitesse angulaire ω sont les variables d'état du système, qui sont aussi les sorties. \triangle

Il peut être utile, à des fins par exemple de simulation numérique, de discrétiser le modèle (1.1), on obtient alors une représentation d'état discrète constituée de n équations récurrentes du premier ordre et p équations algébriques de la forme :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = f_n(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ y_1(k) = h_1(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \\ \vdots \\ y_p(k) = h_p(x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k)) \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x_1(k)$ à $x_n(k)$, $u_1(k)$ à $u_m(k)$ et $y_1(k)$ à $y_p(k)$ sont respectivement, les variables d'état, de commande et de sortie en des instants discrets $k \in \mathbf{N}$. Les fonctions f_1, \dots, f_n et h_1, \dots, h_p sont des fonctions scalaires supposées généralement continues dérivables.

Ce modèle d'état est dit non stationnaire si les fonctions f_1, \dots, f_n dépendent explicitement du temps discret k , dans le cas contraire on parle de modèles d'état stationnaires. Comme dans le cas continu et avec des notations analogues, le modèle d'état discret 1.5 peut s'écrire sous la forme plus condensée suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k), u(k)) \end{cases} \quad (1.6)$$

De façon générale, le modèle (1.6) permet la représentation des systèmes dont l'évolution des variables d'état et/ou l'observation des variables de sortie ne peut se faire qu'à des instants particuliers. C'est le cas notamment, des systèmes échantillonnés et des systèmes logiques séquentiels.

Dans le cas d'un système linéaire discret, les fonctions f et h s'écrivent :

$$\begin{cases} f(x(k), u(k)) = Fx(k) + Gu(k) \\ h(x(k), u(k)) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (1.7)$$

où $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est la matrice d'évolution, $G \in \mathbf{R}^{n \times m}$ est la matrice d'entrée, $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ est la matrice de sortie et $D \in \mathbf{R}^{p \times m}$ est la matrice de transmission directe des entrées sur les sorties.

Exemple 1.2. On peut discrétiser le système (5.87) à l'aide de l'approximation d'Euler :

$$\dot{x}(kT_e) \approx \frac{x((k+1)T_e) - x(kT_e)}{T_e}$$

où T_e est le pas temporel de discrétisation et k un entier. Dans un but de simplification des notations, on écrira par exemple $x(k)$ au lieu de $x(kT_e)$. La représentation d'état discrète résultant de l'approximation d'Euler s'écrit alors :

$$\begin{cases} \theta(k+1) = \theta(k) + T_e \omega(k) \\ \omega(k+1) = \frac{T_e}{J} u(k) + \left(1 - \frac{bT_e}{J}\right) \omega(k) - \frac{mglT_e}{J} \sin \theta(k) \end{cases}$$

2.2 Linéarisation du modèle d'état

Un système industriel est très souvent destiné à fonctionner en mode de régulation, c'est à dire que l'on souhaite maintenir les sorties le plus près possible du point de fonctionnement désiré, malgré les différentes perturbations tendant à l'en écarter. Dans ces conditions, l'utilisation d'une représentation d'état non linéaire globale, à des fins de commande ou de diagnostic n'est pas justifiée. On peut se contenter d'une représentation d'état linéaire locale, valable uniquement au voisinage du point de fonctionnement désiré pour le système.

2.2.1 Point d'équilibre et ensemble d'équilibre

Un système physique, représenté par les équations $\dot{x} = f(x, u)$, est dit dans un état stationnaire si son état n'évolue pas au cours du temps. Dans ces conditions, la dérivée temporelle du vecteur d'état est nulle ($\dot{x}(t) = 0$). On appelle points d'équilibre les états stationnaires du système, ils sont donc solution de $f(x_o, u_o) = 0$ où l'indice zéro est mis pour indiquer qu'il s'agit des grandeurs à l'équilibre. On appelle ensemble d'équilibre \mathbf{E} du système, l'ensemble de ses points d'équilibre, soit :

$$\mathbf{E} = \{(x_o, u_o) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \mid f(x_o, u_o) = 0\} \quad (1.8)$$

Exemple I.3. Les points d'équilibre du système représenté par les équations (5.87) sont tels que :

$$\begin{cases} \omega_o = 0 \\ u_o = mgl \sin \theta_o \end{cases}$$

2.2.2 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Considérons une fonction $g(x)$ continu monovarié de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . On souhaite décrire le comportement de cette fonction au voisinage d'un point x_o à l'aide d'une relation linéaire de la forme $a\delta x + b$, où δx représente de petites variations de la variable x autour de x_o : $x = x_o + \delta x$ et où a et b sont des constantes à déterminer.

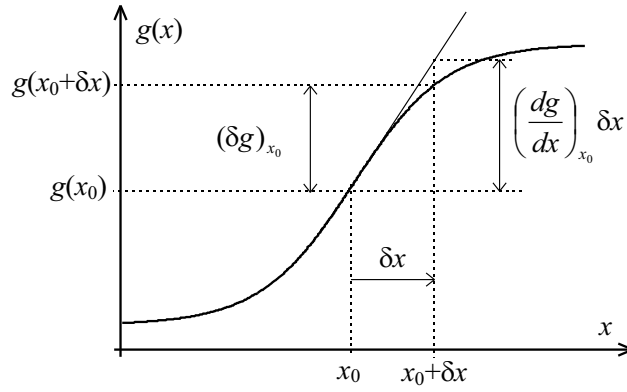


FIGURE 1.3 – Variation de $g(x)$ pour une variation δx de la variable autour de x_o

On peut voir sur la figure 1.3 que si l'accroissement δx est suffisamment petit alors on peut écrire que :

$$g(x_o + \delta x) \approx g(x_o) + \left(\frac{dg}{dx} \right)_{x_o} \delta x \quad (1.9)$$

Notons que la variation réelle de la fonction g en x_o , due à une variation δx de la variable autour de x_o , notée $(\delta g)_{x_o} = g(x_o + \delta x) - g(x_o)$ sur la figure, a été approchée par la quantité $(dg/dx)_{x_o} \delta x$, où $(dg/dx)_{x_o}$ représente la pente de la droite tangente à la fonction g en x_o . La relation (1.9) correspond au premier terme du développement en série de Taylor de la fonction g . Ceci peut être généralisé au cas des fonctions multidimensionnelles : $g(x) = [g_1(x) \ g_2(x) \ \cdots \ g_n(x)]^T$ avec $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$, on a alors :

$$g(x_o + \delta x) = g(x_o) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_o} \delta x \quad (1.10)$$

où $\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_o}$ est le jacobien de la fonction g évalué en $x_o = [x_1^o \ x_2^o \ \cdots \ x_n^o]^T$:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_o} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right)_{x_o} & \cdots & \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right)_{x_o} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial g_n}{\partial x_1} \right)_{x_o} & \cdots & \left(\frac{\partial g_n}{\partial x_n} \right)_{x_o} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Utilisons maintenant le résultat (1.10) pour linéariser le système différentiel (1.2) autour du point de fonctionnement, ou point d'équilibre $(x_o, u_o) = (x_1^o, \dots, x_n^o, u_1^o, \dots, u_m^o)$. On considère à cet effet de petites variations δx de l'état, autour de $x_o : x = x_o + \delta x$ et de petites variations δu de la commande, autour de $u_o : u = u_o + \delta u$. On a par conséquent :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_o + \delta \dot{x} = f(x_o + \delta x, u_o + \delta u) \\ y = h(x_o + \delta x, u_o + \delta u) \end{cases} \quad (1.12)$$

or x_o est un vecteur constant, il dépend du point d'équilibre autour duquel s'effectue la linéarisation, on a donc $\dot{x}_o = 0$. En réalisant un développement en série de Taylor, au premier ordre, des fonctions f et h , on a :

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = f(x_o, u_o) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_o \delta u \\ y = h(x_o, u_o) + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_o \delta x + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)_o \delta u \\ \delta x = x - x_o, \quad \delta u = u - u_o \end{cases} \quad (1.13)$$

où l'indice zéro indique que les dérivées partielles doivent être évaluées à l'équilibre (x_o, u_o) . D'après la définition d'un point d'équilibre on a : $f(x_o, u_o) = 0$, d'autre part $h(x_o, u_o)$ représente le vecteur de sortie à l'équilibre, nous le noterons y_o . Le modèle linéarisé s'écrit alors :

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_o \delta u \\ \delta y = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_o \delta x + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)_o \delta u \\ \delta x = x - x_o, \quad \delta u = u - u_o, \quad \delta y = y - y_o \end{cases} \quad (1.14)$$

posons :

$$\begin{aligned} A(x_o, u_o) &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_o & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_o & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_o \end{bmatrix}, & B(x_o, u_o) &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_o & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right)_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)_o & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right)_o \end{bmatrix} \\ C(x_o, u_o) &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right)_o & \cdots & \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_n}\right)_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial h_p}{\partial x_1}\right)_o & \cdots & \left(\frac{\partial h_p}{\partial x_n}\right)_o \end{bmatrix}, & D(x_o, u_o) &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_1}\right)_o & \cdots & \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_m}\right)_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial h_p}{\partial u_1}\right)_o & \cdots & \left(\frac{\partial h_p}{\partial u_m}\right)_o \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.15)$$

La matrice $A(x_o, u_o) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est le jacobien de f par rapport à x évalué en (x_o, u_o) . La matrice $B(x_o, u_o) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ est le jacobien de f par rapport à u évalué en (x_o, u_o) . La matrice $C(x_o, u_o) \in \mathbf{R}^{p \times n}$ est le jacobien de h par rapport à x évalué à l'équilibre (x_o, u_o) . La matrice $D(x_o, u_o) \in \mathbf{R}^{p \times m}$ est le jacobien de h par rapport à u évalué en (x_o, u_o) .

Le système linéarisé autour d'un point d'équilibre (x_o, u_o) s'écrit, sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}(t) = A(x_o, u_o)\delta x(t) + B(x_o, u_o)\delta u(t) \\ \delta y(t) = C(x_o, u_o)\delta x(t) + D(x_o, u_o)\delta u(t) \end{cases} \quad (1.16)$$

on obtient donc de la sorte une description linéaire du système dynamique non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre. Il est à noter que le modèle linéarisé ainsi obtenu dépend du point d'équilibre autour duquel a été effectué la linéarisation.

Exemple I.4. On souhaite linéariser le modèle (5.87) autour de l'équilibre $\theta_0 = \pi/4$. On a :

$$\begin{cases} f(x, u) = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{J}u(t) - \frac{b}{J}\omega(t) - \frac{mgl}{J}\sin\theta(t) \\ \omega \end{array} \right] \\ x = [\theta \quad \omega]^T \end{cases}$$

d'où :

$$A(\theta_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl}{J}\cos\theta_o & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}, \quad B(\theta_o) = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_o = \begin{bmatrix} \frac{0}{J} \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

la représentation d'état linéaire est alors la suivante :

$$\delta \dot{x} = \begin{bmatrix} \delta \dot{\theta} \\ \delta \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgl\sqrt{2}}{2J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \theta \\ \delta \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \delta u \quad (1.17)$$

2.3 Modèle de transfert ou représentation externe

Une représentation très utilisée dans le cadre de l'étude des systèmes linéaires est la représentation par fonction de transfert et sa généralisation au cas multivariable par matrice de transfert. Dans le cas monovariable (une entrée et une sortie), la fonction de transfert représente la transformée de Laplace³ de la réponse impulsionnelle du système, calculée pour des conditions initiales nulles. La généralisation de cette définition au cas multivariable conduit à la notion de matrice de transfert. La matrice de transfert $G(s)$ d'un système multivariable est obtenue en prenant la transformée de Laplace de la représentation d'état linéaire du système étudié. Sachant que pour des conditions initiales nulles : $\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s)$, on a :

$$\mathcal{L} \left[\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \right] = \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

en éliminant l'état entre ces deux équations on obtient une relation entre les sorties du système et ses entrées, d'où la dénomination de représentation externe :

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad \text{avec : } G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.18)$$

où I est la matrice unité. La matrice de transfert $G(s)$ représente la transformées de Laplace des réponses impulsionnelles du système vis-à-vis de chacune des entrées.

3. La transformée de Laplace d'un signal continu $x(t)$ s'écrit [31] :

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}, \quad \text{où } s \text{ est la variable complexe de Laplace : } s = a + jb.$$