

# Table des matières

<b>1</b>	<b>LES NOMBRES RÉELS</b>	<b>1</b>
1.1	Le corps des réels . . . . .	1
1.2	Partie entière et développement décimal . . . . .	4
1.3	Développement en fraction continue . . . . .	6
1.4	Équation du second degré dans $\mathbb{R}$ . . . . .	8
1.5	Exercices . . . . .	9
<b>2</b>	<b>NOMBRES COMPLEXES</b>	<b>17</b>
2.1	Écriture algébrique des nombres complexes . . . . .	17
2.2	Conjugué et module . . . . .	18
2.3	Le plan complexe . . . . .	19
2.4	Racines d'un nombre complexe . . . . .	22
2.5	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité . . . . .	23
2.6	Transformations du plan complexe . . . . .	24
2.7	Équations algébriques dans le corps $\mathbb{C}$ . . . . .	25
2.8	Exercices . . . . .	27
<b>3</b>	<b>LIMITES ET CONTINUITÉ</b>	<b>33</b>
3.1	Limite d'une fonction . . . . .	33
3.2	Continuité d'une fonction . . . . .	34
3.3	Opérations sur les limites . . . . .	35
3.4	Quelques limites usuelles . . . . .	36
3.5	Limites de polynômes, fractions rationnelles et radicaux . . . . .	37
3.6	Équivalents et notations de Landau . . . . .	38
3.7	Fonctions continues sur un intervalle . . . . .	40
3.8	Continuité séquentielle . . . . .	42
3.9	Exercices . . . . .	42
<b>4</b>	<b>CALCUL DIFFÉRENTIEL</b>	<b>47</b>
4.1	Fonction dérivable . . . . .	47
4.2	Règles de dérivation . . . . .	50

4.3	Dérivées des fonctions usuelles . . . . .	51
4.4	Dérivation des fonctions composées . . . . .	51
4.5	Dérivée d'une fonction réciproque . . . . .	52
4.6	Dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ . . . . .	53
4.7	Sens de variation d'une fonction dérivable . . . . .	53
4.8	Les différentes formules de Taylor . . . . .	55
4.9	Développements limités . . . . .	56
4.10	Exercices . . . . .	58
<b>5</b>	<b>FONCTIONS USUELLES</b>	<b>65</b>
5.1	Généralités sur les fonctions et les applications . . . . .	65
5.2	Fonctions convexes . . . . .	66
5.3	Fonctions affines . . . . .	67
5.4	Fonctions polynômes de degré deux ou trois . . . . .	68
5.5	Fonctions homographiques . . . . .	69
5.6	Fonction logarithme népérien . . . . .	69
5.7	Fonction exponentielle . . . . .	70
5.8	Fonctions exponentielles de base $a$ ( $a > 0$ ) . . . . .	71
5.9	Fonctions puissances . . . . .	71
5.10	Croissance comparée . . . . .	72
5.11	Fonctions hyperboliques . . . . .	72
5.12	Formules de trigonométrie hyperbolique . . . . .	73
5.13	Fonctions trigonométriques réciproques . . . . .	74
5.14	Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	75
5.15	Méthode pour étudier une fonction . . . . .	75
5.16	Exercices . . . . .	76
<b>6</b>	<b>TRIGONOMÉTRIE</b>	<b>83</b>
6.1	Fonctions trigonométriques . . . . .	83
6.2	Formules de trigonométrie . . . . .	84
6.3	Trigonométrie dans le triangle . . . . .	86
6.4	Équations trigonométriques . . . . .	86
6.5	Phénomènes ondulatoires . . . . .	88
6.6	Exercices . . . . .	90
<b>7</b>	<b>CALCUL INTÉGRAL</b>	<b>97</b>
7.1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . . .	97
7.2	Sommes de Riemann . . . . .	100
7.3	Primitive . . . . .	101
7.4	Primitive et calcul intégral . . . . .	102
7.5	Intégration par parties . . . . .	103
7.6	Changement de variable . . . . .	104

7.7	Quelques primitives classiques . . . . .	105
7.8	Calcul d'intégrales comportant des radicaux . . . . .	106
7.9	Intégration des fractions rationnelles . . . . .	107
7.10	Calcul des intégrales trigonométriques . . . . .	108
7.11	Calcul approché d'une intégrale . . . . .	110
7.12	Intégration des fonctions complexes . . . . .	111
7.13	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	111
7.14	Exercices . . . . .	112
<b>8</b>	<b>SUITES</b>	<b>121</b>
8.1	Suites réelles et complexes . . . . .	121
8.2	Convergence d'une suite . . . . .	122
8.3	Suites réelles monotones et adjacentes . . . . .	123
8.4	Limite sup et limite inf . . . . .	123
8.5	Règle de calculs sur les limites . . . . .	124
8.6	Suites équivalentes et notations de Landau . . . . .	125
8.7	Suites arithmétiques et géométriques . . . . .	126
8.8	Suites récurrentes . . . . .	127
8.9	Résolution d'équations . . . . .	128
8.10	Suites récurrentes linéaires . . . . .	130
8.11	Suites de Cauchy . . . . .	132
8.12	Suites récurrentes et fractales . . . . .	133
8.13	Exercices . . . . .	133
<b>9</b>	<b>ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b>	<b>141</b>
9.1	Équation différentielle linéaire du premier ordre . . . . .	141
9.2	Équation de Bernoulli . . . . .	143
9.3	Équation de Riccati . . . . .	144
9.4	Équations à variables séparables . . . . .	144
9.5	Équations différentielles homogènes . . . . .	145
9.6	Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants . . . . .	146
9.7	Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients non constants . . . . .	148
9.8	Généralités sur les équations différentielles du premier ordre . . . . .	153
9.9	Système d'équations différentielles . . . . .	154
9.10	Système autonome, espace des phases . . . . .	155
9.11	Exercices . . . . .	158
<b>10</b>	<b>SÉRIES</b>	<b>171</b>
10.1	Généralités sur les séries . . . . .	171
10.2	Opérations sur les séries numériques . . . . .	172

10.3	Séries géométriques . . . . .	173
10.4	Les séries de Riemann . . . . .	173
10.5	Étude des séries réelles positives . . . . .	174
10.6	Règles et critères de convergence des séries positives . . . . .	175
10.7	Comparaison d'une série avec une intégrale impropre . . . . .	176
10.8	Convergence absolue des séries numériques . . . . .	177
10.9	Les séries alternées . . . . .	178
10.10	Produit de Cauchy de deux séries numériques . . . . .	179
10.11	Problèmes de regroupement de termes . . . . .	179
10.12	Famille sommable . . . . .	180
10.13	Exercices . . . . .	181
<b>11</b>	<b>INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES</b>	<b>189</b>
11.1	Intégrales convergentes ou divergentes . . . . .	189
11.2	Quelques intégrales de référence . . . . .	191
11.3	Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives	193
11.4	Changement de variable et intégration par parties . . . . .	196
11.5	Intégrales absolument convergentes . . . . .	196
11.6	Intégrale semi-convergente . . . . .	197
11.7	Fonction intégrable . . . . .	198
11.8	Intégrales et séries . . . . .	198
11.9	Exercices . . . . .	199
<b>12</b>	<b>SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS</b>	<b>207</b>
12.1	Convergence simple d'une suite de fonctions . . . . .	207
12.2	La convergence uniforme . . . . .	207
12.3	Transmission de propriétés par convergence uniforme . . . . .	209
12.4	Dérivation et convergence uniforme . . . . .	209
12.5	La convergence uniforme sur tout compact . . . . .	210
12.6	Convergence simple des séries de fonctions . . . . .	211
12.7	Convergence uniforme d'une série de fonctions . . . . .	212
12.8	Convergence normale d'une série . . . . .	212
12.9	Continuité, intégration, dérivation d'une série de fonctions . . . . .	213
12.10	Quelques développements en séries usuels . . . . .	214
12.11	La fonction Zêta . . . . .	214
12.12	Exercices . . . . .	216
<b>13</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER</b>	<b>225</b>
13.1	Fonction périodique (ou signal) . . . . .	225
13.2	Coefficients de Fourier . . . . .	227
13.3	Convergence des séries de Fourier . . . . .	229
13.4	Convergence en moyenne quadratique . . . . .	231

13.5 Généralisation . . . . .	237
13.6 Exercices . . . . .	237
<b>14 SÉRIES ENTIÈRES</b>	<b>249</b>
14.1 Généralités . . . . .	249
14.2 Rayon de convergence d'une série entière . . . . .	250
14.3 Méthodes de recherche du rayon de convergence . . . . .	250
14.4 Opérations sur les séries entières . . . . .	252
14.5 Convergence normale et uniforme des séries entières . . . . .	253
14.6 Continuité de la somme d'une série entière . . . . .	254
14.7 Quelques compléments sur la convergence des séries entières . . . . .	255
14.8 Intégration terme à terme d'une série entière . . . . .	256
14.9 Dérivation terme à terme d'une série entière . . . . .	256
14.10 Série de Taylor d'une fonction $C^\infty$ . . . . .	258
14.11 Fonctions développables en série entières . . . . .	259
14.12 Résolution d'une équation différentielle linéaire à l'aide des séries entières . . . . .	261
14.13 Exercices . . . . .	263
<b>15 FONCTIONS HOLOMORPHES</b>	<b>271</b>
15.1 L'exponentielle complexe . . . . .	271
15.2 Limites et continuité . . . . .	272
15.3 Fonctions holomorphes . . . . .	273
15.4 Intégrale sur un chemin . . . . .	274
15.5 Analyticité des fonctions holomorphes . . . . .	278
15.6 Singularités . . . . .	279
15.7 La méthode des résidus . . . . .	280
15.8 Exercices . . . . .	282
<b>16 INTÉGRALE À PARAMÈTRE</b>	<b>289</b>
16.1 La fonction Gamma d'Euler . . . . .	289
16.2 Cas d'un intervalle d'intégration compact . . . . .	291
16.3 Le théorème de convergence dominée . . . . .	294
16.4 Convergence dominée et intégrales à paramètres . . . . .	295
16.5 Applications aux intégrales doubles . . . . .	297
16.6 Exercices . . . . .	299
<b>17 TRANSFORMATION DE LAPLACE</b>	<b>307</b>
17.1 Transformée de Laplace d'une fonction . . . . .	307
17.2 Propriétés de la transformée de Laplace . . . . .	310
17.3 Transformation de Laplace et translatées . . . . .	314
17.4 Changement d'échelle . . . . .	314

17.5	Table de transformées de Laplace . . . . .	315
17.6	Transformée de Laplace et produit de convolution . . . . .	316
17.7	Unicité et transformation inverse . . . . .	317
17.8	Brève introduction à la théorie des distributions . . . . .	318
17.9	Exercices . . . . .	322
<b>18</b>	<b>TRANSFORMATION DE FOURIER</b>	<b>333</b>
18.1	La transformée de Fourier . . . . .	333
18.2	Lien entre les transformations de Fourier et de Laplace . . . . .	335
18.3	Premières propriétés de la transformée de Fourier . . . . .	335
18.4	Influence de la parité . . . . .	336
18.5	Transformées de Fourier sinus et cosinus . . . . .	337
18.6	Changement d'échelle . . . . .	337
18.7	Retard et modulation d'un signal . . . . .	337
18.8	Dérivation et transformation de Fourier . . . . .	337
18.9	Transformées des fonctions $C^\infty$ à décroissance rapide . . . . .	338
18.10	Transformée de Fourier-Plancherel sur $L_c^2$ et $L^2$ . . . . .	339
18.11	Produit de convolution . . . . .	340
18.12	Transformation de Fourier inverse . . . . .	343
18.13	Formule sommatoire de Poisson . . . . .	345
18.14	Transformée de Fourier discrète . . . . .	345
18.15	Exercices . . . . .	348
<b>19</b>	<b>DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉS</b>	<b>359</b>
19.1	Probabilité sur un univers . . . . .	359
19.2	Dénombrement . . . . .	361
19.3	Événements indépendants et probabilités conditionnelles . . . . .	362
19.4	Exercices . . . . .	364
<b>20</b>	<b>VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES</b>	<b>373</b>
20.1	Variabes aléatoires . . . . .	373
20.2	Loi de probabilité . . . . .	374
20.3	Espérance et variance . . . . .	374
20.4	Quelques lois de probabilité . . . . .	375
20.5	Couple de variables aléatoires . . . . .	378
20.6	Exercices . . . . .	382
<b>21</b>	<b>VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES</b>	<b>393</b>
21.1	Fonction de répartition et densité de probabilité . . . . .	393
21.2	Quelques exemples de variables aléatoires à densité . . . . .	394
21.3	Fonction de répartition et densité de $Y = \phi(X)$ . . . . .	396
21.4	Espérance et variance . . . . .	396

21.5	La loi normale . . . . .	398
21.6	Couple de variables aléatoires continues . . . . .	400
21.7	Théorèmes de convergence . . . . .	404
21.8	Approximations par la loi normale . . . . .	405
21.9	Exercices . . . . .	406
<b>22</b>	<b>ÉCHANTILLONNAGE ET ESTIMATION</b>	<b>419</b>
22.1	Introduction à la statistique inférentielle . . . . .	419
22.2	Distribution d'échantillonnage d'une moyenne . . . . .	419
22.3	Distribution d'échantillonnage d'une fréquence . . . . .	421
22.4	Seuils et intervalles de confiance pour la loi normale . . . . .	422
22.5	Estimation d'une moyenne ou d'une fréquence . . . . .	422
22.6	Distribution d'échantillonnage d'une différence de moyenne . . . . .	423
22.7	Loi de Student . . . . .	423
22.8	Estimation de la moyenne à partir d'un petit échantillon . . . . .	425
22.9	Le test du khi-deux . . . . .	425
22.10	Exercices . . . . .	427
<b>23</b>	<b>STATISTIQUE DESCRIPTIVE ET AJUSTEMENT</b>	<b>433</b>
23.1	Paramètres statistiques . . . . .	433
23.2	Ajustement linéaire . . . . .	436
23.3	Exercices . . . . .	438
<b>24</b>	<b>TABLES</b>	<b>445</b>
24.1	Table de la Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ . . . . .	445
24.2	Table de la Loi normale centrée réduite pour les grandes valeurs de $t$ . . . . .	446
24.3	Table de la Loi de Poisson . . . . .	446
24.4	Loi de Student . . . . .	447
24.5	Table de la Loi du Khi-deux . . . . .	448
	<b>Index</b>	<b>453</b>