Chapitre 1

LES NOMBRES RÉELS

1.1 Le corps des réels

1.1.1 Introduction

La plupart de nos calculs les plus courants font intervenir les nombres réels. L'arithmétique usuelle concerne les nombres entiers naturels qui constituent l'ensemble $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,...\}$. Les entiers relatifs sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1,0,1,2,3,...\}$. Les quotients d'entiers relatifs forment le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, qui contient les nombres décimaux $\mathbb{D}$. Toutefois cet ensemble de nombres est encore insuffisant. Considérons par exemple l'équation très simple $x^2 = 2$; elle n'admet aucune solution dans $\mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe deux entiers p et q premiers entre eux, tels que la fraction irréductible $x = \frac{p}{q}$ vérifie $x^2 = 2$. On en tire $p^2 = 2q^2$; le nombre premier 2 divise donc p^2, ce qui entraîne qu'il divise p. On peut poser $p = 2k$, et on est ramené à $2k^2 = q^2$. Le même raisonnement montre alors que 2 divise q. Il apparaît donc une contradiction : puisque p et q sont tous deux divisibles par deux, la fraction x n'est pas irréductible.
Il est donc nécessaire de construire un autre corps de nombres où les équations $x^2 = 2,3,5...$ auront des solutions. Il existe différentes méthodes de construction de $\mathbb{R}$, comme par exemple les coupures de Dedekind, mais il n'est pas dans notre propos de détailler ici la construction des nombres réels. Nous admettrons donc le résultat suivant :

Proposition 1 *Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{R}$, appelé le corps des nombres réels, tel que :*

1. *$\mathbb{Q}$ est un sous corps de $\mathbb{R}$.*
2. *Le corps $\mathbb{R}$ est commutatif et totalement ordonné, c'est-à-dire qu'il existe une relation d'ordre $\leq$ permettant de comparer deux réels quelconques, et cette relation est compatible avec l'addition des réels et la multiplication par un réel positif.*
3. *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*

Remarques

Dire que $\mathbb{R}$ est un corps commutatif signifie qu'il existe deux opérations usuelles, l'addition des réels $+$ et la multiplication $\times$ qui possèdent les propriétés intervenant habituellement dans les calculs :

– L'addition est interne, commutative, $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a+b = b+a$.
– Elle est associative : $\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a+(b+c) = (a+b)+c$.
– Elle possède un élément neutre 0 (zéro), et tout réel x admet un symétrique noté $-x$, tel que $x+(-x) = 0$ (ce que l'on note $x - x = 0$).
– La multiplication est elle aussi interne, commutative ($a \times b = b \times a$) et associative : $\forall(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.
– Elle possède un élément neutre 1, et tout réel non nul x admet un inverse $\frac{1}{x} = x^{-1}$, tel que $x \times x^{-1} = 1$. La multiplication se notera simplement $a \times b = ab$.

Signalons deux identités remarquables :
• La formule du binôme de Newton : Si a et b désignent deux réels, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

• L'identité de Bernoulli :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k.$$

1.1.2 Majorant, borne supérieure

Désignons par A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Le réel M est un majorant (respectivement : minorant) de A si et seulement si : $\forall a \in A \ : \ a \leq M$ (respectivement : $a \leq M$). S'il existe un plus petit majorant de A, on l'appelle la **borne supérieure** de A et on le note $\sup A$ ou $\sup\limits_{a \in A} a$. La borne inférieure de A si elle existe est le plus petit minorant. On la note $\inf A$ ou $\inf\limits_{a \in A} a$.

Exemple : Si A est l'ensemble des nombres de la forme $\dfrac{n}{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$, il est facile de voir que $M = 1$ est un **majorant** de A. C'est aussi la borne supérieure : $1 = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{n}{n+1}$.

1.1.3 Propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

Il importe de bien comprendre et mémoriser les propriétés suivantes :

1. $a < b \Longrightarrow a + c < b + c, \forall c \in \mathbb{R}$.

2. $a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c, \forall c \in \mathbb{R}$.
3. Si $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$ (de même avec $\leq$).
4. Si $a < b$ et $c > 0$ alors $ac < bc$.
5. Si $a < b$ et $c < 0$ alors $ac > bc$.
6. $0 < a \leq b \Longrightarrow 0 < \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.
7. Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $a \leq b \Longleftrightarrow a^2 \leq b^2$.

Elles interviennent dans la résolution des inéquations.

Exemple 1

Résoudre l'inéquation : $-4(5 - x) < 24$.
On écrira : $-4(5-x) < 24 \Longleftrightarrow 5 - x > -\dfrac{24}{4} \Longleftrightarrow 5 - x > -6$, ou encore : $11 > x$. L'ensemble des solutions S est formé de tous les réels strictement inférieurs à 11 ; on le note : $S =]-\infty, 11[$.

Exemple 2

Résoudre l'inéquation : $\dfrac{x-1}{3-x} < 2$.

Cette fois il faut distinguer deux cas, selon que $3 - x$ est positif ou négatif.

Premier cas : $3 - x > 0$, soit $x < 3$.

$$\frac{x-1}{3-x} < 2 \Longleftrightarrow x - 1 < 2(3-x) \Longleftrightarrow x - 1 < 6 - 2x \Longleftrightarrow 3x < 7$$

Comme $\frac{7}{3} < 3$, tous les réels inférieurs strictement à $\frac{7}{3}$ sont bien solutions.

Deuxième cas : $3 - x < 0$, soit $x > 3$.

$$\frac{x-1}{3-x} < 2 \Longleftrightarrow x - 1 > 2(3-x) \Longleftrightarrow x - 1 > 6 - 2x \Longleftrightarrow 3x > 7$$

Comme $\frac{7}{3} < 3$, on ne retiendra pas les solutions vérifiant $\frac{7}{3} < x \leq 3$. Seuls les réels supérieurs à 3 sont bien solutions.
En résumé l'ensemble des solutions est formé de tous les réels strictement inférieurs à $\frac{7}{3}$ ou supérieurs à 3, ce que l'on note : $S = \left]-\infty, \dfrac{7}{3}\right[\cup]3, +\infty[$.

1.1.4 Intervalles et valeur absolue

Étant donnés deux réels a et b ($a < b$), on définit les différents intervalles de bornes a et b par :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$, $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$, $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\}$, $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x\}$

– $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \, / x \leq b\}$, $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} \, / \, x < b\}$

Définition 1 *Étant donné un réel x, on définit sa valeur absolue, notée $|x|$ par :*

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{si } x \geq 0, \\ -x & \textit{si } x < 0. \end{cases}$$

La valeur absolue du réel x est également donnée par

$$|x| = \max\{x, -x\} \quad \text{et} \quad |x| = \sqrt{x^2}.$$

Elle possède les propriétés suivantes : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (première inégalité triangulaire).
- $||x| - |y|| \leq |x-y|$ (deuxième inégalité triangulaire).
- $|xy| = |x||y|$, $|-x| = |x|$, $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

L'appartenance à un intervalle peut se traduire en utilisant la valeur absolue ; si α est un réel positif, on a :

- $|x| \leq \alpha \Longleftrightarrow x \in [-\alpha,\alpha]$
- $|x| > \alpha \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -\alpha[\cup]\alpha, +\infty[$
- $|x-a| \leq \alpha \Longleftrightarrow x \in [a-\alpha, a+\alpha]$
- $|x-a| < \alpha \Longleftrightarrow x \in]a-\alpha, a+\alpha[$

Géométriquement, on peut représenter $\mathbb{R}$ comme une droite graduée. La distance entre deux points d'abscisse x et y de la droite est alors définie par
$d(x,y) = |x-y|$.

1.2 Partie entière et développement décimal

1.2.1 Partie entière d'un réel

Définition 2 *Étant donné un réel x, on définit sa partie entière notée $[x]$ ou $E(x)$ comme le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.*

$$E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \, / \, k \leq x\}$$

Si nous notons $k = E(x)$, nous avons donc : $k \leq x < k+1$.

1.2.2 Nombres rationnels et irrationnels

Un réel x qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ est dit irrationnel ; nous avons vu que c'est le cas pour $\sqrt{2}$. Le mathématicien Johann Heinrich Lambert a démontré en 1761 que π était un nombre irrationnel. La base des logarithmes népériens, notée e est également un irrationnel.

Proposition 2 *Dans tout intervalle $[a,b]$ ($a < b$), il existe un nombre rationnel et un nombre irrationnel (il en existe en fait une infinité).*

Preuve

En effet, Si l'une des deux bornes est rationnelle et l'autre irrationnelle, c'est évident.
Si $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, alors on choisit un entier q tel que $\frac{\pi}{q} < b - a$; le nombre $x = a + \frac{\pi}{q}$ est alors irrationnel et dans $[a,b]$. Si a et b sont irrationnels, on choisit un entier q tel que $\frac{1}{q} < b - a$ puis on prend $p = E(qa)$; on a alors :

$$\frac{p}{q} \leq a < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \leq a + b - a = b$$

ce qui fait que le rationnel $x = \frac{p+1}{q}$ est bien dans $[a,b]$.

Tout réel est donc limite d'une suite de nombres rationnels ; on peut exprimer ce résultat en disant que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$.

Remarque

On définit également les réels algébriques. Un nombre réel x est algébrique s'il est racine d'une équation polynomiale $\sum_{i=0}^{p} a_i x^i = 0$, dans laquelle les coefficients a_i sont des entiers relatifs, dont l'un au moins est non nul. Les nombres qui ne sont pas algébriques sont dits transcendants. En 1822 Lindemann a démontré que π était un nombre transcendant. Il en existe bien d'autres, comme par exemple le nombre de Champernowne : $N_{ch} = 0{,}12345678910111213...$ que l'on obtient en écrivant à la suite les nombres entiers en base dix (théorème de K. Mahler, 1961) ; en fait "la plupart" des nombres réels sont transcendants en un sens que nous allons définir.

1.2.3 Dénombrabilité

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dénombrable. Par contre $\mathbb{R}$, de même que $[0,1]$ n'est pas dénombrable. Comme l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, il en résulte que les nombres transcendants forment une partie non dénombrable de $\mathbb{R}$.

1.2.4 Développement décimal illimité

Proposition 3 *Tout réel x de l'intervalle $[0,1[$ admet un développement de la forme*

$$x = 0{,}a_1 a_2 ... a_n ...$$

où les a_i sont des nombres entiers de $[[0,9]]$. Ce développement est unique si on impose la condition supplémentaire que tous les a_i ne sont pas égaux à 9 à partir d'un certain rang. Cela signifie que x est somme de la série : $x = \sum_{1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

Quelques remarques

1. Si $x \in \mathbb{R}$, connaissant l'écriture décimale de l'entier $k = E(x)$ et le développement décimal de $x - E(x) \in [0{,}1[$, on en déduit le développement décimal illimité du réel x :
$$x = b_p b_{p-1} ... b_0{,}a_1 a_2 ... a_n ...$$
2. Les nombres réels dont les décimales a_i sont toutes nulles à partir d'un certain rang sont les nombres décimaux.
3. Les nombres réels dont les décimales a_i sont périodiques à partir d'un certain rang sont les nombres rationnels.
Par exemple : $\frac{22}{7} = 3{,}142857142857142857... = 3{,}\underline{142857}$ (la partie soulignée est la partie périodique, qui n'apparaît pas forcément tout de suite après la virgule comme dans l'exemple).

1.3 Développement en fraction continue

Nous nous limitons ici à une rapide introduction aux fractions continues qui ont de très nombreuses applications, comme par exemple le calcul des engrenages en mécanique, le calcul formel, ou encore la résolution de certaines équations de Pell-Fermat. Le lecteur désireux d'approfondir cette notion pourra se reporter à [6].

Un exemple de développement

Considérons le nombre $x = \frac{54}{33} = 1{,}6363...$; sa partie entière est 1 et on peut l'écrire $x = 1 + \frac{21}{33}$. L'inverse de $\frac{21}{33}$ est $\frac{33}{21} = 1 + \frac{12}{21}$ et on peut donc écrire :
$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{12}{21}}.$$
On a ensuite : $\frac{21}{12} = 1 + \frac{9}{12}$, d'où : $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{9}{12}}}$.

Pour finir : $\frac{12}{9} = 1 + \frac{1}{3}$, ce qui donne : $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}$. Ceci constitue le développement de x en fraction continue : $x = [1{,}1{,}1{,}1{,}3]$.

Généralisation

Nous appellerons fraction continue une fraction de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et où les a_i pour $i \geq 1$ forment une suite, finie ou non, de nombres entiers strictement positifs. Nous définissons par récurrence les notations suivantes : $[a_0] = a_0$, $[a_0,a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$ et pour tout entier p :

$$[a_0,a_1,...,a_{p+1}] = a_0 + \frac{1}{[a_0,a_1,...,a_p]}. \tag{1.1}$$

On vérifie facilement que :

$$[a_0,a_1,...,a_p] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ... + \cfrac{1}{a_{p-1} + \cfrac{1}{a_p}}}}}.$$

Nous dirons que le réel x admet comme développement en fraction continue la suite (a_n) si et seulement si la suite des réduites $\Big([a_0,a_1,...,a_p]\Big)_{p\in\mathbb{N}}$) converge vers le réel x. Si le développement existe il est nécessairement donné par l'algorithme suivant de décomposition :

- initialisation : $x_0 = x$, $a_0 = [x_0]$;
- tant que $x_j \notin \mathbb{N}$, faire : $x_{j+1} = \frac{1}{x_j - a_j}$, $\quad a_{j+1} = E(x_{j+1})$.

ce qui prouve l'unicité du développement. Nous admettrons que la suite des réduites obtenue par cet algorithme converge vers le réel x (cf. exercice 15). Tout nombre réel admet donc une décomposition en fraction continue unique.

Remarque

Dans le cas où le réel x est rationnel, son développement en fraction continue est fini ; cela se voit bien sur l'exemple précédent où on a développé le nombre $x = \dfrac{54}{33}$. Pour calculer les a_j on effectue la division de 54 par 33 dont le reste est 21, puis celle de 33 par 21 dont le reste est 12, etc. À chaque étape le diviseur est le reste de la division précédente ; cette suite de restes est donc décroissante et va donc nécessairement aboutir à une division exacte qui arrête l'algorithme.

1.4 Équation du second degré dans $\mathbb{R}$

1.4.1 Résolution

Nous considérons ici l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.2}$$

avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 - 4ac$. Différents cas se présentent :

1. Si $\Delta > 0$, l'équation (1.2) a deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. Si $\Delta = 0$, l'équation (1.2) a une racine double $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, l'équation (1.2) n'a pas de racines réelles.

Noter que dans les deux premiers cas : $x_1 + x_2 = \dfrac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

1.4.2 Application

Pour déterminer deux nombres réels z et y dont on connaît la somme s et le produit p (avec $s^2 - 4p \geq 0$), on résout $x^2 - sx + p = 0$. Les nombres z et y sont les racines de cette équation.

1.4.3 Équation bicarrée

Ce sont les équations de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Elles se ramènent à une équation du second degré en posant $t = x^2$.
Exemple : On veut résoudre sur $\mathbb{R}$: $x^4 + x^2 - 2 = 0$. On pose $t = x^2$ et on se ramène à $t^2 + t - 2 = 0$ qui admet pour racine $t = 1$ et $t = -2$. La racine négative est à rejeter. Comme $x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm 1$, les racines réelles de l'équation bicarrée sont 1 et -1.

1.4.4 Remarque sur les équations d'ordre supérieur

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation $y = f(x)$ avec l'axe Ox. Le théorème de la valeur intermédiaire peut être utile pour prouver l'existence des racines. Cette méthode peut s'appliquer notamment à des équations algébriques de degré supérieur ou égal à trois. Dans ce cas $x = a$ est une racine