CHAPITRE I

Introduction à la mécanique des fluides

La mécanique des fluides se divise en hydrostatique (fluides immobiles) et dynamique des fluides (fluides en mouvement). La résolution d'un problème d'hydrostatique consistera le plus souvent dans le calcul de la pression ou la détermination d'un équilibre entre deux pressions différentes. Tandis qu'en dynamique des fluides, on s'attachera à calculer diverses propriétés d'un fluide (par exemple sa vitesse, la pression, la masse volumique…) en fonction de l'espace et du temps. Dans ce dernier cas, nous présenterons quelques notions simples permettant l'étude des mouvements des fluides, qu'ils soient liquides ou gaz, où nous nous intéresserons à des grandeurs indépendantes du temps. Les axiomes fondamentaux dont nous ferons l'usage sont les lois de conservation des masses, d'énergie et de la quantité de mouvement (2^e loi de Newton).

1. Description des fluides

Les fluides sont des substances qui s'écoulent et peuvent facilement changer de forme pour adopter celle des récipients qui les contiennent, comme illustré sur la figure I.1 ci-dessous.

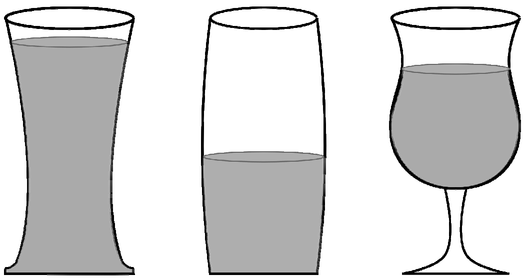

Figure I.1. Exemples de récipient de différentes formes – le contenu fluide adopte la forme du contenant.

Les fluides peuvent être divisés en deux catégories : les liquides et les gaz. Cette distinction est basée sur la notion de compressibilité. Notons que la définition utilisée pour les fluides permet aussi de considérer les milieux granulaires comme des fluides. Cependant nous n'en parlerons pas ici.

Un liquide occupe un volume bien défini quel que soit le contenant et peut présenter une interface bien définie : les liquides sont traités comme des fluides incompressibles (ou quasi-incompressibles).

Un gaz de masse donnée se détend pour occuper le volume total du contenant qui l'enferme : les gaz doivent être traités comme des fluides compressibles.

1.1. Volume élémentaire d'un fluide

En hydrodynamique lorsque le fluide s'écoule, à une vitesse v, il n'est pas aisé de définir et d'identifier une quantité fixe de masse, contrairement au cas de la mécanique des corps solides rigides pour lequel ce système est facilement défini. On isolera par la pensée un volume élémentaire d'étude dV, de masse dm, qui se déplace avec l'écoulement du fluide à la vitesse v (figure I.2). Ce volume sera choisi judicieusement, en fonction de la géométrie du récipient contenant le fluide (parallélépipède, cylindre, etc.). Ce volume, "petit" par rapport au volume du système contient un très grand nombre de molécules du fluide, constant en moyenne (les molécules peuvent sortir ou rentrer dans ce volume). On ne s'intéressera pas aux mouvements individuels de chacune de ces molécules mais à un mouvement d'ensemble, la vitesse du fluide v représente donc une vitesse moyenne. Pour résoudre un problème de mécanique des fluides on commencera souvent par considérer les forces qui s'appliquent sur ce volume élémentaire.

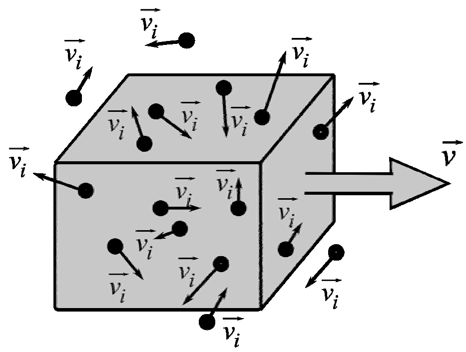

Figure I.2. Exemple de volume élémentaire de fluide dV, de masse dm, qui s'écoule avec une vitesse $\vec{v}$. Cette vitesse n'est pas égale aux vitesses des molécules qui peuvent entrer et sortir de dV. Le nombre de molécules enfermées dans dV est suffisant pour y définir une pression P et une température T.

1.2. Masse volumique

On définit la masse volumique ρ comme la masse d'une substance homogène occupant un volume donné; la masse dm d'un volume élémentaire dV est donc $dm = \rho\, dV$. La masse volumique s'exprime dans le système international d'unités en kg/m^3.

On définit aussi la densité comme étant le rapport entre deux masses volumiques : celle du fluide considéré et celle de l'air pour les gaz ($d = \rho / \rho_{\mathrm{air}}$) ou de l'eau pour les liquides ($d = \rho / \rho_{\mathrm{H_2O}}$). C'est une grandeur sans dimensions.

Quelques valeurs de masse volumique et de densité sont données dans le tableau ci-dessous à température ambiante :

Milieu	masse volumique ρ ($\mathrm{kg/m^3}$)	densité d
Eau	1000	1
Sang	1059	1,059
Mercure	13600	13,6
Air	1,204	1
Azote	1,25	1,038

1.3. Forces en présence

Les forces qui s'appliquent sur le volume élémentaire sont de deux types : les forces de volume et les forces de surface.

1.3.1. Les forces de volume

Ce sont des forces proportionnelles à la masse ou au volume du fluide. Ces forces agissent sans contact et caractérisent des actions à distance. Par exemple, la force de gravitation agissant sur un volume V (donc de masse ρV) est $\rho V g$, où la constante de gravitation terrestre vaut g = 9,81 m.s^{-2}.

1.3.2. Les forces de surface

Ces forces agissent par contact direct et sont proportionnelles à l'aire A d'une paroi du volume élémentaire considéré. On définit la contrainte f comme la force de surface par unité d'aire de la surface considérée. Soit $\overrightarrow{dF}$ la force qui s'exerce sur un élément de surface dS : $\vec{f} = \overrightarrow{dF} / dS$. On décompose les contraintes en composantes tangentielles $\vec{\tau}$ (cisaillement) et composante normale $\vec{\sigma}$ à la surface considérée (figure I.3).

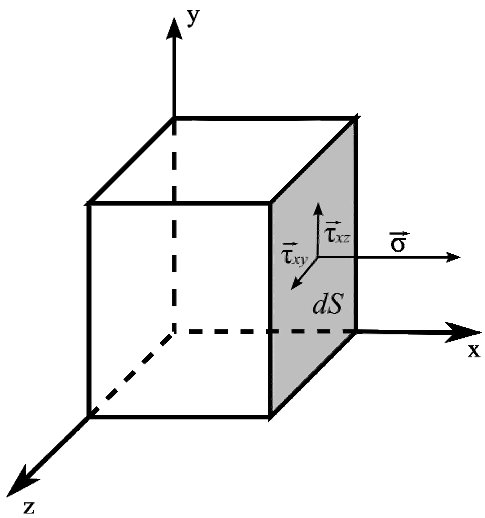

Figure I.3. Représentation des contraintes normale $\vec{\sigma}$ et tangentielles $\vec{\tau}_{xy}$ et $\vec{\tau}_{xz}$ s'exerçant sur une des faces, de surface *dS*, du volume élémentaire.

2. Hydrostatique

2.1. Pression hydrostatique

Dans un fluide au repos l'accélération et la vitesse du volume élémentaire de fluide sont nulles. Dans ces conditions les contraintes tangentielles doivent être nulles, sinon il existerait une force sur la surface qui déplacerait le fluide, ce qui est contraire à l'hypothèse. Il ne reste que la contrainte normale $\vec{\sigma} = -p\,\vec{n}$, où $\vec{n}$ est un

vecteur unitaire perpendiculaire en tout point à la surface qui délimite le volume élémentaire de fluide, et dirigé vers l'extérieur du volume élémentaire (figure I.4).
Le facteur p est la pression exercée en tout point de cette surface, c'est donc le module d'une force par unité de surface. Si $\|\vec{F}\|$ est la norme de la force qui s'exerce sur une surface dS, alors $p = \|\vec{F}\| / dS$. C'est une grandeur scalaire. La pression s'exprime en N/m^2, ou en pascal (Pa).

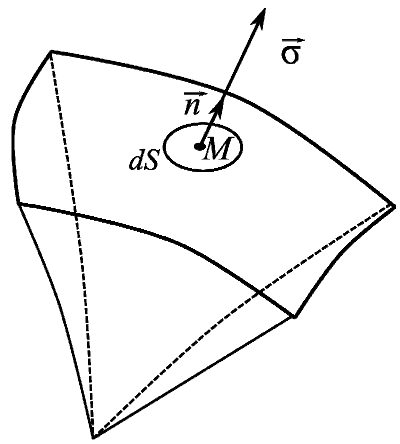

Figure I.4. Représentations d'un petit volume dV et d'un vecteur unitaire $\vec{n}$ perpendiculaire au point M à la surface délimitant le volume dV, et dirigé vers l'extérieur de dV. $\vec{\sigma}$ est la contrainte normale s'exerçant sur la surface élémentaire dS autour du point M.

2.2. Relation fondamentale de l'hydrostatique : Pression dans un fluide en équilibre

2.2.1. Expression différentielle de la pression

- On néglige la gravité

En l'absence d'autres forces (en particulier de la force de pesanteur), la pression est uniforme dans tout le volume de fluide, et par conséquent indépendante de l'orientation des surfaces délimitant le volume élémentaire de fluide considéré (voir problème 1). Considérons le volume élémentaire de fluide de la figure I.5 et les forces de pression F_1 et F_2 selon un seul axe (axe Δ). L'équilibre de ce volume impose $F_1 = F_2$. Ce raisonnement doit s'appliquer dans les 3 directions perpendiculaires du volume considéré, ce qui implique que les forces de pression s'annulent deux à deux. Ceci étant vrai quel que soit le volume considéré (aussi petit soit-il) nous permet de conclure qu'un fluide au repos transmet la pression.

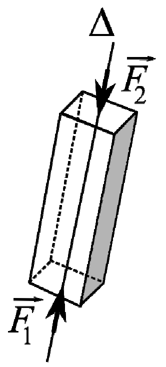

Figure I.5. Forces de pression sur un volume élémentaire de fluide et dans la direction de l'axe Δ.

- En présence de la gravité

a) Démonstration rapide

Choisissons d'abord un volume élémentaire d'étude $dV = dx\,dy\,dz$ de forme cubique enfermant une masse *dm* (figure I.6).

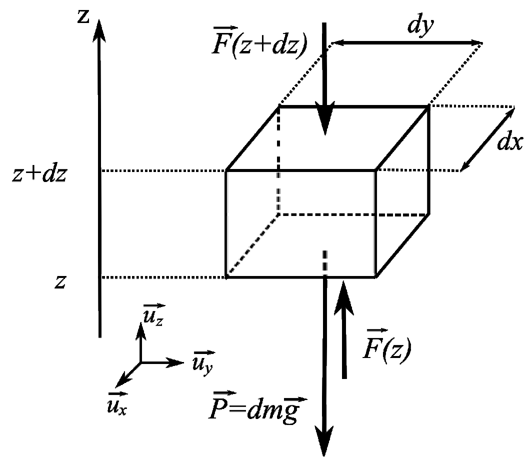

Figure I.6. Volume élémentaire de fluide de forme cubique. Les arêtes du cube sont colinéaires à un système d'axes orthogonaux Oxyz. $\vec{F}(z)$ et $\vec{F}(z+dz)$ représentent les vecteurs forces de pression sur les deux faces du cube perpendiculaires à Oz et situées respectivement en *z* et *z* + *dz*.

En définissant un axe Oz ascendant, les forces agissant sur ce volume *dV* sont :

- le poids :

$$\vec{P} = dm\,\vec{g} = -\rho\, g\, dx\, dy\, dz\, \overrightarrow{u_z}$$

où $\overrightarrow{u_z}$ est le vecteur unitaire suivant z,

- la force de pression en *z* sur la face dont l'aire est égale à *dxdy* :

$$\vec{F}(z) = p(z)\, dx\, dy\, \overrightarrow{u_z}\ ,$$

- la force de pression en *z* + *dz* sur la face dont l'aire est égale à *dxdy* :

$$\vec{F}(z+dz) = -p(z+dz)\, dx\, dy\, \overrightarrow{u_z}\ .$$

La deuxième loi de Newton appliquée au volume élémentaire immobile s'écrit :

$$\vec{F}(z) + \vec{F}(z+dz) + \vec{P} = \vec{0}\ ,$$

$$\left[p(z) - p(z + dz)\right] dx\, dy - \rho\, g\, dx\, dy\, dz = 0\ .$$

En utilisant le développement de Taylor de la fonction $p(z)$ au voisinage de z (voir annexe 2), on obtient :

$$\left[-\frac{dp}{dz} dz\right] dx\, dy - \rho\, g\, dx\, dy\, dz = 0\ .$$

En simplifiant cette expression, on obtient la relation fondamentale de l'hydrostatique pour un fluide :

$$dp = -\rho\, g\ dz\ .$$

Remarques

- Dans un fluide où l'accélération des particules de fluide est nulle, la pression est constante dans un plan orthogonal au champ de force.
- La relation précédente a été établie avec un axe Oz ascendant ($\vec{g} = -\, g\ \overrightarrow{u_z}$). Cette relation généralisée s'écrit :

$$dp = \vec{g} \cdot \overrightarrow{u_z}\ \rho dz\ .$$

b) Démonstration complète (Elle peut être omise en première lecture)

Nous allons établir une relation entre un champ de gravité et la pression au sein d'un fluide.

Comme précédemment, choisissons un volume élémentaire d'étude $dV = dx\, dy\, dz$ *de forme cubique enfermant une masse dm (figure I.7). On note p la pression au centre du cube.*

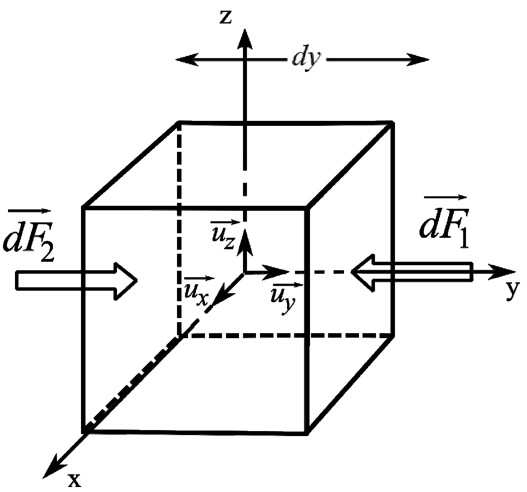

Figure I.7. Volume élémentaire de fluide de forme cubique. Les arêtes du cube sont colinéaires à Ox, Oy ou Oz. $d\overrightarrow{F_1}$ et $d\overrightarrow{F_2}$ représentent les vecteurs forces de pression sur les deux faces du cube perpendiculaires à Oy et situées respectivement en $y = dy/2$ et $y = -\, dy/2$.

Chaque force de pression s'exprime comme un produit de trois termes : la pression, l'aire de la face sur laquelle s'exerce cette pression et le vecteur unitaire indiquant la direction de la force.

Sur le cube représenté ci-dessus, $d\overrightarrow{F_1}$ *est le vecteur force de pression s'exerçant sur la face qui intercepte l'axe Oy en* $y = dy/2$ *et dont l'aire est égale à dxdz. On aura donc :*

$$d\overrightarrow{F_1} = p\left(\frac{dy}{2}\right)\cdot\left(dx\,dz\right)\cdot\left(-\overrightarrow{u_y}\right).$$

En utilisant un développement de Taylor au voisinage de 0 à l'ordre 1 (voir annexe *2)*

$$p\left(\frac{dy}{2}\right) = p(0) + \frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{dy}{2}\right) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}.$$

D'où

$$d\overrightarrow{F_1} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\cdot\left(dx\,dz\right)\cdot\left(-\overrightarrow{u_y}\right),$$

$d\overrightarrow{F_2}$ *est le vecteur force de pression s'exerçant sur la face qui intercepte l'axe Oy en* $y = -dy/2$ *et dont l'aire est égale à dxdz. On aura donc :*

$$d\overrightarrow{F_2} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\cdot\left(dx\,dz\right)\cdot\left(\overrightarrow{u_y}\right).$$

Le vecteur force résultante $d\overrightarrow{F_S}$ *est obtenu en combinant toutes les forces élémentaires s'exerçant sur chacune des six faces du cube élémentaire :*

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{F_S} = &\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(dy\,dz\right)\left(\overrightarrow{u_x}\right) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\left(dy\,dz\right)\left(-\overrightarrow{u_x}\right) \\ &+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(dx\,dz\right)\left(\overrightarrow{u_y}\right) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\left(dx\,dz\right)\left(-\overrightarrow{u_y}\right) \\ &+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(dx\,dy\right)\left(\overrightarrow{u_z}\right) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\left(dx\,dy\right)\left(-\overrightarrow{u_z}\right). \end{aligned}$$

Ce qui donne après simplification :

$$d\overrightarrow{F_S} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial x}\vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial x}\vec{u}_z\right)dx\,dy\,dz.$$

Le terme entre parenthèses représente ***le vecteur gradient*** *de p(x,y,z) (voir* annexe *3)*

$$\overrightarrow{grad}\,p \equiv \vec{\nabla}\,p = \frac{\partial p}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial p}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial p}{\partial z}\overrightarrow{u_z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right)p.$$

On écrit donc :

$$d\overrightarrow{F_s} = -\vec{\nabla}\,p\;dx\,dy\,dz.$$

La force résultante $d\vec{F}$ *appliquée au cube s'écrit :*

$$d\vec{F} = d\overrightarrow{F_v} + d\overrightarrow{F_s} = \left(\rho\,\vec{g} - \vec{\nabla}\,p\right)dx\,dy\,dz.$$

Et par unité de volume :

$$\frac{d\vec{F}}{dx\,dy\,dz} = \rho\,\vec{g} - \vec{\nabla}\,p.$$

La deuxième loi de Newton appliquée au volume élémentaire immobile s'écrit :

$$d\vec{F} = \vec{a}\, dm = \vec{a}\, \rho\, dV = \vec{0},$$

et par unité de volume :

$$\rho\vec{g} - \vec{\nabla} p = \vec{0}.$$

La relation précédente est la loi fondamentale de l'hydrostatique pour un fluide soumis à un champ de pesanteur.

- *Le premier terme du membre de gauche représente la force de volume, par unité de volume.*
- *Le deuxième terme du membre de gauche représente la force de pression, par unité de volume.*

Cette équation vectorielle se décompose en trois équations qui doivent être vérifiées. Ainsi :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x = 0 \quad \text{selon Ox,}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 \quad \text{selon Oy,}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0 \quad \text{selon Oz.}$$

En choisissant un repère où l'axe Oz est orienté selon $\vec{g}$ *:* $\vec{g} = g_z \overrightarrow{u_z} = -g\overrightarrow{u_z}$ *(g > 0), les équations deviennent :*

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \;\; ; \;\; -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \;\; ; \;\; -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0.$$

Les deux premières relations permettent de conclure que p ne dépend que de z : Dans un liquide où l'accélération des particules de fluide est nulle la pression est constante dans un plan orthogonal au champ de force.

La dernière des trois équations s'écrit :

$$-\frac{dp}{dz} = \rho g \quad ou \quad dp = -\rho g\, dz.$$

On retrouve l'équation différentielle établie au paragraphe 2.2.1.a dans la démonstration rapide.

2.2.2. Intégration de l'équation différentielle sur la pression

L'équation $dp = -\rho g\, dz$ s'intègre facilement dans deux cas : lorsque ρ est une fonction linéaire de p et lorsque ρ est constant. Nous allons considérer successivement ces deux cas.

1) Cas des gaz : ρ fonction linéaire de p.

Lorsque la masse volumique ne peut pas être considérée constante, ρ doit être reliée à p par une équation d'état du fluide. Par exemple pour un gaz parfait :

$$pV = nRT,$$

où n est le nombre de moles contenues dans le volume V, T est la température absolue (en Kelvin) et R est la constante des gaz parfaits ($R = 8{,}32$ J.K^{-1}.mol^{-1}).

Si M est la masse molaire du gaz, sa masse volumique s'écrit $\rho = nM/V$. En remplaçant cette dernière relation dans celle des gaz parfaits, on obtient l'équation reliant la pression p et la masse volumique ρ :