

Table des matières

Introduction	7
1 Rappels	9
1.1 Espace de probabilité	9
1.2 Loi d'une variable aléatoire	12
1.2.1 Lois discrètes	13
1.2.2 Lois à densité	14
1.3 Indépendance	16
1.4 Espérance des v.a.	17
1.4.1 Définition et propriétés de l'espérance	17
1.4.2 Calculs de l'espérance et de la variance des v.a.r. de lois usuelles	19
1.4.3 Retour sur l'indépendance des v.a.	20
1.4.4 Vecteurs aléatoires	21
1.4.5 Le théorème de Fubini	22
1.5 Inégalités et espaces L^p	22
1.6 Espérance conditionnelle	23
1.7 Références bibliographiques	24
2 La loi des grands nombres	25
2.1 Rappels sur la convergence des suites de v.a.	25
2.2 La loi du tout ou rien	28
2.3 La loi faible des grands nombres	31
2.4 La loi forte des grands nombres	32
2.5 Deux applications de la loi des grands nombres	37
2.6 Simulations	40
2.6.1 Estimation de la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres	40
2.6.2 Approximation de la probabilité d'un événement et de la loi bi- nomiale	42
2.6.3 Calcul d'une intégrale multiple par la méthode de Monte Carlo .	45
2.7 Références bibliographiques	47
3 Le théorème central limite	49
3.1 Rappels sur la convergence en loi	49
3.2 Transformation de Fourier et convergence en loi	50
3.3 Le théorème central limite	52
3.4 Applications directes du théorème central limite	54
3.5 Estimation de la probabilité d'un événement	56
3.6 Un complément au théorème central limite	58

3.7	Simulations numériques	60
3.7.1	Recherche d'un intervalle de confiance	60
3.7.2	Étude d'un cas particulier	62
3.8	Références bibliographiques	63
4	Simulation de variables aléatoires	65
4.1	Introduction	65
4.2	Simulation de v.a.r. courantes	66
4.2.1	Simulations des v.a. binomiales, géométriques et de Poisson	67
4.2.2	Simulation des lois exponentielles et gaussiennes	70
4.3	Procédés généraux de simulation	71
4.4	Simulation de v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^n	76
4.5	Simulations de certaines lois singulières	78
4.6	Calcul d'intégrales par la méthode hit or miss	80
4.7	Méthode de la réduction de variance	83
4.8	Simulations numériques	85
4.8.1	Simulation de la loi gamma de paramètre $a \in]0, 1[$	85
4.8.2	Simulation de la fonction de répartition d'une loi singulière	87
4.8.3	Simulation de la durée de vie d'un système complexe	89
4.8.4	Calcul d'une intégrale avec réduction de variance	91
4.8.5	Simulations probabilistes avec MAPLE	93
4.9	Références bibliographiques	94
5	Statistique	95
5.1	Introduction à la modélisation statistique	95
5.2	Résultats préliminaires	96
5.3	La méthode du maximum de vraisemblance	99
5.4	Le modèle linéaire gaussien	104
5.5	Intervalles de confiance	106
5.6	Introduction à la théorie des tests	110
5.6.1	Test d'une hypothèse simple contre une hypothèse simple	111
5.6.2	Tests avec hypothèses composites	115
5.7	Tests non-paramétriques	118
5.8	Simulations	122
5.8.1	Calculs de quantiles pour les lois du chi-deux et de Student	122
5.8.2	Estimation de la moyenne pour la loi gaussienne	123
5.8.3	Tests de Neyman relatifs à la loi de Poisson	125
5.8.4	Test de Kolmogorov pour une loi de Student	126
5.9	Références bibliographiques	127
6	Chaînes de Markov	129
6.1	Quelques rappels concernant l'espérance conditionnelle	129
6.2	Définitions et exemples	130
6.3	Chaîne canonique	135
6.4	Temps d'arrêt et propriété forte de Markov	138
6.5	Potentiel, états récurrents et transients	142
6.6	Chaînes de Markov irréductibles	148
6.7	Mesure invariante et convergence	153
6.8	Exemples de chaînes de Markov et simulations	167
6.8.1	Un modèle de diffusion gazeux	167
6.8.2	Déplacement dans un labyrinthe	171

6.8.3	Processus de naissance et mort à temps continu	172
6.8.4	Introduction aux chaînes de Markov à espace d'état fini et à temps continu	176
6.9	Références bibliographiques	182
7	Martingales	183
7.1	Martingales et théorème d'arrêt	183
7.2	Convergence des martingales	186
7.3	Applications	187
7.3.1	Processus de Wright	187
7.3.2	Urne de Pólya.	190
7.3.3	Processus de naissance et de mort	191
7.3.4	Marches aléatoires au plus proche voisin	194
7.4	Une autre version de la loi des grands nombres	196
7.5	Simulations	198
7.5.1	Convergence p.s. de X_n , lorsque $n \rightarrow \infty$	198
7.5.2	Calculs d'espérances conditionnelles	199
7.5.3	Une application du théorème d'arrêt	201
7.6	Appendice	202
7.7	Références bibliographiques	204
8	Processus de branchement	205
8.1	Introduction	205
8.2	Modélisation du processus de branchement	205
8.3	Extinction et comportement asymptotique de Z_n	209
8.4	Cas où la loi de branchement est géométrique	215
8.5	Simulations	217
8.6	Références bibliographiques	220
9	Processus de Poisson	221
9.1	Étude du processus de Poisson	221
9.2	Applications	231
9.3	Compléments sur les lois exponentielles	235
9.4	Simulations	238
9.4.1	Absence de mémoire de la loi exponentielle	239
9.4.2	Simulation d'une v.a. de Poisson via un processus de Poisson	240
9.4.3	Modélisation du niveau d'eau d'un barrage	242
9.5	Références bibliographiques	244
10	Files d'attente	245
10.1	Description et classification des files d'attente	245
10.2	Un premier modèle : la file d'attente $M/G/\infty$	246
10.3	Etude de la file d'attente $M/G/1$	248
10.4	Simulations	255
10.4.1	Un exemple élémentaire de file d'attente	255
10.4.2	Le modèle à un nombre infini de serveurs	256
10.4.3	Le modèle avec un seul serveur	258
10.5	Références bibliographiques	260

11 Un modèle mathématique pour la finance	261
11.1 Introduction	261
11.2 Arbitrage	263
11.3 Évaluation des options européennes	265
11.4 Étude d'un phénomène limite	271
11.5 Simulations	275
11.5.1 Calcul du prix de l'option d'achat par un calcul direct	276
11.5.2 Arbre des prix	276
11.5.3 Calcul du prix des options d'achat et de vente européennes par la méthode de l'arbre des prix	276
11.5.4 Calcul du prix de l'option de vente américaine par la méthode de l'arbre des prix	277
11.5.5 Calcul du prix d'une option d'achat sur moyenne	278
11.6 Références bibliographiques	280
Bibliographie	281
Index	283