

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Rappels</b>	<b>9</b>
1.1 Espace de probabilité . . . . .	9
1.2 Loi d'une variable aléatoire . . . . .	12
1.2.1 Lois discrètes . . . . .	13
1.2.2 Lois à densité . . . . .	14
1.3 Indépendance . . . . .	16
1.4 Espérance des v.a. . . . .	17
1.4.1 Définition et propriétés de l'espérance . . . . .	17
1.4.2 Calculs de l'espérance et de la variance des v.a.r. de lois usuelles	19
1.4.3 Retour sur l'indépendance des v.a. . . . .	20
1.4.4 Vecteurs aléatoires . . . . .	21
1.4.5 Le théorème de Fubini . . . . .	22
1.5 Inégalités et espaces $L^p$ . . . . .	22
1.6 Espérance conditionnelle . . . . .	23
1.7 Références bibliographiques . . . . .	24
<b>2 La loi des grands nombres</b>	<b>25</b>
2.1 Rappels sur la convergence des suites de v.a. . . . .	25
2.2 La loi du tout ou rien . . . . .	28
2.3 La loi faible des grands nombres . . . . .	31
2.4 La loi forte des grands nombres . . . . .	32
2.5 Deux applications de la loi des grands nombres . . . . .	37
2.6 Simulations . . . . .	40
2.6.1 Estimation de la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres . . . . .	40
2.6.2 Approximation de la probabilité d'un événement et de la loi bi- nomiale . . . . .	42
2.6.3 Calcul d'une intégrale multiple par la méthode de Monte Carlo .	45
2.7 Références bibliographiques . . . . .	47
<b>3 Le théorème central limite</b>	<b>49</b>
3.1 Rappels sur la convergence en loi . . . . .	49
3.2 Transformation de Fourier et convergence en loi . . . . .	50
3.3 Le théorème central limite . . . . .	52
3.4 Applications directes du théorème central limite . . . . .	54
3.5 Estimation de la probabilité d'un événement . . . . .	56
3.6 Un complément au théorème central limite . . . . .	58

3.7	Simulations numériques . . . . .	60
3.7.1	Recherche d'un intervalle de confiance . . . . .	60
3.7.2	Étude d'un cas particulier . . . . .	62
3.8	Références bibliographiques . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Simulation de variables aléatoires</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Simulation de v.a.r. courantes . . . . .	66
4.2.1	Simulations des v.a. binomiales, géométriques et de Poisson . . . . .	67
4.2.2	Simulation des lois exponentielles et gaussiennes . . . . .	70
4.3	Procédés généraux de simulation . . . . .	71
4.4	Simulation de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	76
4.5	Simulations de certaines lois singulières . . . . .	78
4.6	Calcul d'intégrales par la méthode hit or miss . . . . .	80
4.7	Méthode de la réduction de variance . . . . .	83
4.8	Simulations numériques . . . . .	85
4.8.1	Simulation de la loi gamma de paramètre $a \in ]0, 1[$ . . . . .	85
4.8.2	Simulation de la fonction de répartition d'une loi singulière . . . . .	87
4.8.3	Simulation de la durée de vie d'un système complexe . . . . .	89
4.8.4	Calcul d'une intégrale avec réduction de variance . . . . .	91
4.8.5	Simulations probabilistes avec MAPLE . . . . .	93
4.9	Références bibliographiques . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Statistique</b>	<b>95</b>
5.1	Introduction à la modélisation statistique . . . . .	95
5.2	Résultats préliminaires . . . . .	96
5.3	La méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	99
5.4	Le modèle linéaire gaussien . . . . .	104
5.5	Intervalles de confiance . . . . .	106
5.6	Introduction à la théorie des tests . . . . .	110
5.6.1	Test d'une hypothèse simple contre une hypothèse simple . . . . .	111
5.6.2	Tests avec hypothèses composites . . . . .	115
5.7	Tests non-paramétriques . . . . .	118
5.8	Simulations . . . . .	122
5.8.1	Calculs de quantiles pour les lois du chi-deux et de Student . . . . .	122
5.8.2	Estimation de la moyenne pour la loi gaussienne . . . . .	123
5.8.3	Tests de Neyman relatifs à la loi de Poisson . . . . .	125
5.8.4	Test de Kolmogorov pour une loi de Student . . . . .	126
5.9	Références bibliographiques . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Chaînes de Markov</b>	<b>129</b>
6.1	Quelques rappels concernant l'espérance conditionnelle . . . . .	129
6.2	Définitions et exemples . . . . .	130
6.3	Chaîne canonique . . . . .	135
6.4	Temps d'arrêt et propriété forte de Markov . . . . .	138
6.5	Potentiel, états récurrents et transients . . . . .	142
6.6	Chaînes de Markov irréductibles . . . . .	148
6.7	Mesure invariante et convergence . . . . .	153
6.8	Exemples de chaînes de Markov et simulations . . . . .	167
6.8.1	Un modèle de diffusion gazeux . . . . .	167
6.8.2	Déplacement dans un labyrinthe . . . . .	171

6.8.3	Processus de naissance et mort à temps continu . . . . .	172
6.8.4	Introduction aux chaînes de Markov à espace d'état fini et à temps continu . . . . .	176
6.9	Références bibliographiques . . . . .	182
<b>7</b>	<b>Martingales</b>	<b>183</b>
7.1	Martingales et théorème d'arrêt . . . . .	183
7.2	Convergence des martingales . . . . .	186
7.3	Applications . . . . .	187
7.3.1	Processus de Wright . . . . .	187
7.3.2	Urne de Pólya. . . . .	190
7.3.3	Processus de naissance et de mort . . . . .	191
7.3.4	Marches aléatoires au plus proche voisin . . . . .	194
7.4	Une autre version de la loi des grands nombres . . . . .	196
7.5	Simulations . . . . .	198
7.5.1	Convergence p.s. de $X_n$ , lorsque $n \rightarrow \infty$ . . . . .	198
7.5.2	Calculs d'espérances conditionnelles . . . . .	199
7.5.3	Une application du théorème d'arrêt . . . . .	201
7.6	Appendice . . . . .	202
7.7	Références bibliographiques . . . . .	204
<b>8</b>	<b>Processus de branchement</b>	<b>205</b>
8.1	Introduction . . . . .	205
8.2	Modélisation du processus de branchement . . . . .	205
8.3	Extinction et comportement asymptotique de $Z_n$ . . . . .	209
8.4	Cas où la loi de branchement est géométrique . . . . .	215
8.5	Simulations . . . . .	217
8.6	Références bibliographiques . . . . .	220
<b>9</b>	<b>Processus de Poisson</b>	<b>221</b>
9.1	Étude du processus de Poisson . . . . .	221
9.2	Applications . . . . .	231
9.3	Compléments sur les lois exponentielles . . . . .	235
9.4	Simulations . . . . .	238
9.4.1	Absence de mémoire de la loi exponentielle . . . . .	239
9.4.2	Simulation d'une v.a. de Poisson via un processus de Poisson . . . . .	240
9.4.3	Modélisation du niveau d'eau d'un barrage . . . . .	242
9.5	Références bibliographiques . . . . .	244
<b>10</b>	<b>Files d'attente</b>	<b>245</b>
10.1	Description et classification des files d'attente . . . . .	245
10.2	Un premier modèle : la file d'attente $M/G/\infty$ . . . . .	246
10.3	Etude de la file d'attente $M/G/1$ . . . . .	248
10.4	Simulations . . . . .	255
10.4.1	Un exemple élémentaire de file d'attente . . . . .	255
10.4.2	Le modèle à un nombre infini de serveurs . . . . .	256
10.4.3	Le modèle avec un seul serveur . . . . .	258
10.5	Références bibliographiques . . . . .	260

<b>11 Un modèle mathématique pour la finance</b>	<b>261</b>
11.1 Introduction . . . . .	261
11.2 Arbitrage . . . . .	263
11.3 Évaluation des options européennes . . . . .	265
11.4 Étude d'un phénomène limite . . . . .	271
11.5 Simulations . . . . .	275
11.5.1 Calcul du prix de l'option d'achat par un calcul direct . . . . .	276
11.5.2 Arbre des prix . . . . .	276
11.5.3 Calcul du prix des options d'achat et de vente européennes par la méthode de l'arbre des prix . . . . .	276
11.5.4 Calcul du prix de l'option de vente américaine par la méthode de l'arbre des prix . . . . .	277
11.5.5 Calcul du prix d'une option d'achat sur moyenne . . . . .	278
11.6 Références bibliographiques . . . . .	280
<b>Bibliographie</b>	<b>281</b>
<b>Index</b>	<b>283</b>