Chapitre I

OSCILLATIONS A UN DEGRE DE LIBERTE

1. MISE EN EQUATION DE L'OSCILLATEUR UNIQUE

1.1. Oscillateur en translation

Pour obtenir un modèle linéaire de l'oscillateur, considérons le système schématisé ci-dessous, constitué d'un solide de masse m, attaché à un bâti fixe par un ressort de traction-compression et un amortisseur de type visqueux et soumis à une excitation représentée par une force verticale f(t) fonction connue du temps.

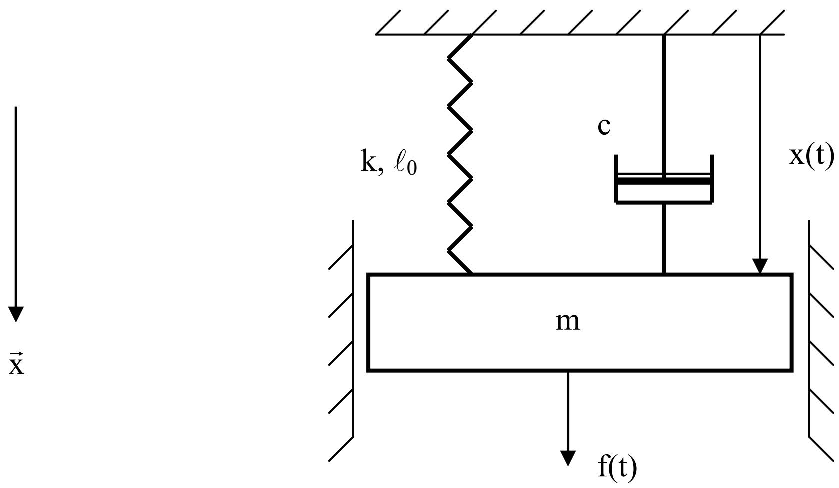


Figure 1

Les forces agissant sur la masse en translation rectiligne selon $\vec{x}$, vecteur unitaire descendant, sont :

- le poids : $mg\vec{x}$, g : intensité du champ de la pesanteur local (9,81 m/s^2 à Paris)

- la force exercée par le ressort de dureté (ou raideur) k (en N/m), de longueur libre ℓ_0 : $k(\ell_0 - x)\vec{x}$, la longueur (variable) x étant mesurée à partir de l'extrémité du ressort fixée au bâti ; cette force est proportionnelle au changement de longueur du ressort

- la force due à l'amortisseur : $-cx'\vec{x}$ (c exprimé en Ns/m), proportionnelle à la vitesse x'

- la force excitatrice : $f(t)\vec{x}$ (f exprimé en N)
- la liaison glissière est supposée parfaite, donc sans composante d'efforts selon $\vec{x}$.

Selon le principe fondamental de la dynamique, la masse multipliée par l'accélération du solide en translation, est égale à la somme des forces extérieures exercées au solide. L'équation de la somme dynamique en conséquence sur l'axe $\vec{x}$ s'écrit :

$$\boxed{mx'' = mg + k(\ell_0 - x) - cx' + f(t)} \tag{1.1}$$

Les grandeurs m, c et k sont des constantes positives.

Equilibre :

En l'absence de force excitatrice, le système peut être en équilibre (sans vitesse ni accélération) dans la position définie par la valeur x_e indépendante de t, solution de l'équation (1.1) pour $x' = 0$ et $x'' = 0$,

soit : $0 = k(\ell_0 - x_e) + mg$

$$x_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

$\frac{mg}{k}$ est appelée **déflexion statique.** C'est l'allongement du ressort sous l'action du poids mg.

Prenons la position d'équilibre pour origine, c'est à dire effectuons le changement de variable : $x(t) = x_e + \varepsilon(t)$

On obtient l'équation de mouvement de l'oscillateur en translation autour de sa position d'équilibre :

$$\boxed{m\varepsilon'' + c\varepsilon' + k\varepsilon = f(t)} \tag{1.2}$$

1.2. Oscillateur en rotation

Considérons maintenant un volant de moment d'inertie I (exprimé en kg.m^2) en rotation d'angle α autour de l'axe fixe $(O|\vec{x})$ et soumis aux couples d'axe $(O|\vec{x})$:

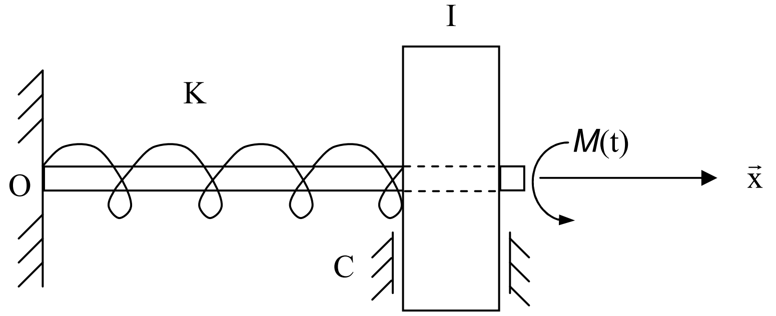


Figure 2

- couple résistant du ressort de torsion de dureté K (en Nm/rad) et d'angle au repos α_0 (mesuré en radian à partir de la même direction fixe au bâti que α) : $K(\alpha_0 - \alpha)\vec{x}$
- couple de freinage de type visqueux de constante C (en Nms/rad) : $-C\alpha'\vec{x}$, proportionnel à la vitesse de rotation α'
- couple excitateur : $M(t)\vec{x}$ (M en Nm)

L'action de la pesanteur (verticale ou horizontale) n'exerce pas de moment selon $O\vec{x}$.
La liaison pivot d'axe $O\vec{x}$, entre le volant et l'arbre, est supposée parfaite.

Le théorème du moment dynamique par rapport à l'axe fixe $O\vec{x}$, s'écrit :

$$\boxed{I\alpha'' = K(\alpha_0 - \alpha) - C\alpha' + M(t)} \qquad (1.3)$$

En l'absence de moment excitateur le système est en équilibre à la position définie par α_e vérifiant : $0 = K(\alpha_0 - \alpha_e)$. Donc : $\alpha_e = \alpha_0$.

En notant $I = mr^2$, où m est la masse du volant et r son rayon de giration par rapport à l'axe de rotation, l'équation (1.3) s'écrit :

$$m(r\alpha'') + \frac{C}{r}\alpha' + \frac{K}{r}\alpha = \frac{K}{r}\alpha_0 + \frac{M(t)}{r}$$

Pour retrouver des termes homogènes à des forces, comme pour l'oscillateur en translation, posons : $r\alpha = r\alpha_0 + \varepsilon(t)$.

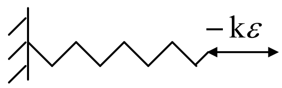
L'équation de mouvement du volant en rotation autour de sa position d'équilibre, devient :

$$\boxed{m\varepsilon'' + \frac{C}{r^2}\varepsilon' + \frac{K}{r^2}\varepsilon = \frac{M(t)}{r}} \qquad (1.4)$$

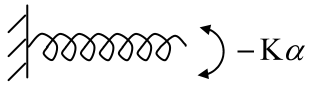
Ainsi les vibrations d'un oscillateur en translation (1.2) ou en rotation (1.4), sont régies par des équations de la même forme. Ce qui nous permet dans la suite de présenter seulement l'étude de l'oscillateur en translation. Pour un système en rotation, il suffit de considérer des déplacements angulaires et de remplacer c, k et f(t) respectivement par $\frac{C}{r^2}$, $\frac{K}{r^2}$ et $\frac{M(t)}{r}$, qui ont les mêmes dimensions physiques qu'eux.

Avant d'étudier les variations de $\varepsilon(t)$, c'est-à-dire les mouvements du système au voisinage de son équilibre, citons des exemples de **raideur** correspondant à la force $-k\varepsilon$ (ou au couple $-K\alpha$) *exercé sur la masse* m (ou sur le solide de moment d'inertie I) par un ressort ou une poutre (barre de section circulaire ou lame de section rectangulaire) de masse négligeable :

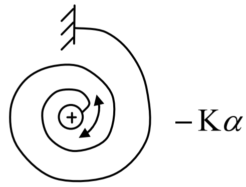
$k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$: raideur d'un ressort de section circulaire de traction-compression (le fil travaille en torsion)



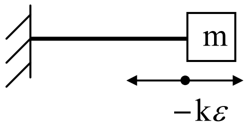
$K = \frac{Ed^4}{128nR}$: raideur d'un ressort de torsion (le fil travaille en flexion)



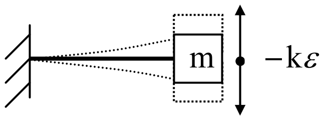
$K = \dfrac{EI_q}{\ell}$: raideur d'un ressort spiral de torsion (le ressort travaille en flexion)



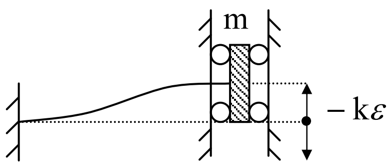
$k = \dfrac{ES}{\ell}$: raideur d'une barre en vibrations longitudinales (elle travaille en traction-compression)



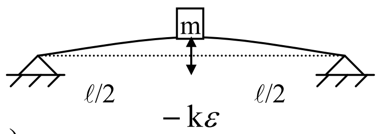
$k = \dfrac{3EI_q}{\ell^3}$: raideur d'une lame encastrée-libre en vibrations transversales (elle travaille en flexion)



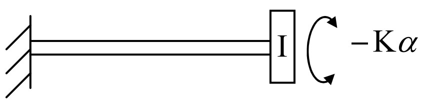
$k = \dfrac{12EI_q}{\ell^3}$: raideur d'une lame en vibrations transversales, lorsque les rotations de ses extrémités sont bloquées



$k = \dfrac{48EI_q}{\ell^3}$: raideur d'une poutre sur appuis simples en vibrations transversales (elle travaille en flexion)



$K = \dfrac{GI_0}{\ell}$: raideur d'une barre de torsion



avec

d : diamètre de la section droite du fil du ressort
R : rayon d'enroulement du ressort
n : nombre de spires
ℓ : longueur de la barre ou de la lame
S : aire de la section droite de la barre
D : diamètre de la barre ou poutre

I_q : moment quadratique de la section droite

($I_q = \dfrac{\pi D^4}{64}$ pour une section circulaire de diamètre D,

$I_q = \dfrac{\pi\left(D_{ext}^4 - D_{int}^4\right)}{64}$ pour un tube de diamètre extérieur D_{ext}

et de diamètre intérieur D_{int} ,

$I_q = \dfrac{bh^3}{12}$ pour une section rectangulaire, b : largeur, h : hauteur)

I_0 : moment polaire de la section droite ($I_0 = \dfrac{\pi D^4}{32}$ pour une section circulaire)

G : module d'élasticité transversal (ou de Coulomb) du matériau

E : module d'élasticité longitudinal (ou de Young) du matériau

2. OSCILLATIONS LIBRES (f(t) = 0)

Recherche du mode propre.

L'équation différentielle (1.2) devient en l'absence de force excitatrice :

$$m\varepsilon'' + c\varepsilon' + k\varepsilon = 0$$

qui régit les vibrations libres du système.

2.1. Système conservatif : Vibrations libres sans amortissement

En l'absence d'amortissement, l'équation de mouvement est:

$$\boxed{m\varepsilon'' + k\varepsilon = 0} \tag{1.5}$$

Elle admet pour solution :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos\omega_0 t + \frac{\varepsilon_0'}{\omega_0}\sin\omega_0 t \tag{1.6}$$

avec : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$ la *pulsation naturelle* du mouvement, $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ la période,

ε_0 et ε_0' étant les conditions initiales : valeurs de $\varepsilon(t)$ et $\varepsilon'(t)$ à la date t = 0.

Les variations en fonction du temps du déplacement $\varepsilon(t)$ à partir de la position d'équilibre, sont pour $\varepsilon_0 > 0$ et $\varepsilon_0' > 0$:

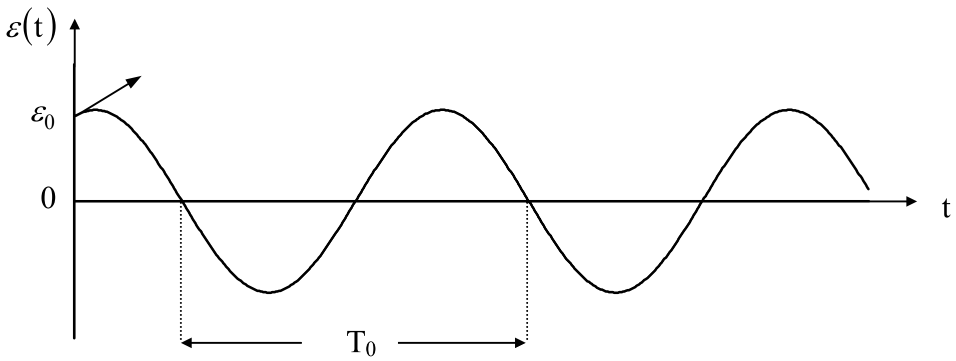


Figure 3

On remarque que l'amplitude des oscillations reste constante au cours du temps.

La solution peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

mettant en évidence :

$A = \sqrt{\varepsilon_0^2 + \left(\dfrac{\varepsilon_0'}{\omega_0}\right)^2}$, l'*amplitude* du déplacement à partir de la position d'équilibre

et

$\cos\varphi = \dfrac{\varepsilon_0'}{\omega_0 A}$, $\sin\varphi = \dfrac{\varepsilon_0}{A}$, où φ est la *phase*.

2.2. Système dissipatif : Vibrations libres avec amortissement visqueux

Nous cherchons une solution de l'équation :

$$\boxed{m\varepsilon'' + c\varepsilon' + k\varepsilon = 0} \tag{1.7}$$

sous la forme $\varepsilon(t) = Ae^{st}$, où A et s sont indépendants du temps (réels ou complexes).

Alors : $\varepsilon'(t) = Ase^{st}$, $\varepsilon''(t) = As^2e^{st}$

et en reportant dans l'équation (1.3) on obtient :

$$Ae^{st}\left(ms^2 + cs + k\right) = 0$$

ce qui est vérifié pour :

$A = 0$ qui correspond à $\varepsilon(t) \equiv 0$, c'est le cas de l'équilibre,

ou $\boxed{ms^2 + cs + k = 0}$ qui est l'équation caractéristique ou l'*équation aux valeurs propres*.

- **1er cas** : $c^2 - 4km > 0$, cas d'un fort amortissement (*hypercritique*): $c > 2\sqrt{km}$.

  On obtient deux racines réelles :

$$\begin{cases} s_1 = -\dfrac{c}{2m} + \sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2 - \dfrac{k}{m}} \\ s_2 = -\dfrac{c}{2m} - \sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2 - \dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

dont le produit : $s_1.s_2 = \dfrac{k}{m}$ positif, indique qu'elles sont du même signe.

Comme leur somme : $s_1 + s_2 = -\dfrac{c}{m}$ est négative, on a donc deux racines réelles négatives.

Ces deux solutions étant linéairement indépendantes, la solution générale s'écrit :

$$\varepsilon(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

A_1 et A_2 sont déterminées en fonction des conditions initiales ε_0 et ε'_0 :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = A_1 + A_2 \\ \varepsilon'_0 = A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{cases} \Rightarrow \quad A_1 = \frac{\varepsilon'_0 - s_2\varepsilon_0}{s_1 - s_2}, \ \ A_2 = \frac{s_1\varepsilon_0 - \varepsilon'_0}{s_1 - s_2}$$

d'où :

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon'_0 - s_2\varepsilon_0}{s_1 - s_2}\ e^{s_1 t} + \frac{s_1\varepsilon_0 - \varepsilon'_0}{s_1 - s_2}\ e^{s_2 t}} \qquad (1.8)$$

Représentation du déplacement $\varepsilon(t)$ en fonction du temps, pour $\varepsilon_0 > 0$ et $\varepsilon'_0 > 0$:

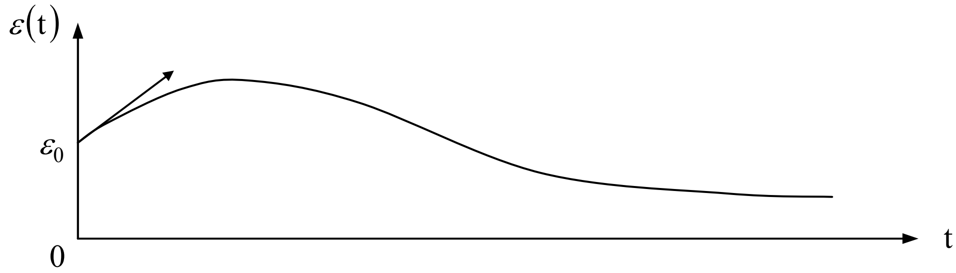


Figure 4

- **2ème cas** : $c^2 - 4km=0, \ \ c = 2\sqrt{km} = c_r$

c'est le cas de l'**amortissement critique**.

L'équation caractéristique a une racine double négative:

$$s = -\frac{c}{2m} = -\frac{1}{\tau} \qquad \text{où } \tau \text{ est la } \textit{constante de temps} \text{ (exprimée en secondes)}$$

$$= -\sqrt{\frac{k}{m}} = -\omega_0$$

La solution générale s'écrit :

$$\varepsilon(t) = (A_1 t + A_2)e^{-t/\tau} \quad \text{ou} \quad \varepsilon(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\omega_0 t}$$

En introduisant les conditions initiales : $\varepsilon_0 = A_2$, $\quad \varepsilon'_0 = A_1 - \frac{1}{\tau}A_2$