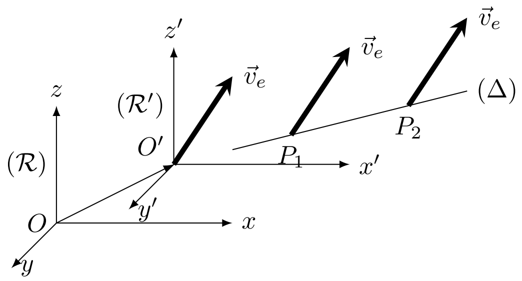
Thème 1 - Référentiels non galiléens

[S1.1] Translation d'un référentiel par rapport à un autre

Un référentiel $(\mathcal{R}')$ est en translation par rapport à un référentiel $(\mathcal{R})$ si une droite (Δ) liée à $(\mathcal{R}')$ garde, au cours du temps, une direction fixe dans $(\mathcal{R})$. De manière équivalente, deux points P_1 et P_2 fixes dans $(\mathcal{R}')$ forment un vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ constant dans $(\mathcal{R})$, même si P_1 et P_2 y sont mobiles. Il en résulte que tous les points de $(\mathcal{R}')$ ont, au même instant, la même vitesse dans $(\mathcal{R})$:

$$\vec{v}(P_1,t) = \vec{v}(P_2,t),\ \forall (P_1,P_2) \text{ fixes dans } (\mathcal{R}')\,.$$

Cette vitesse est la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$, uniforme.

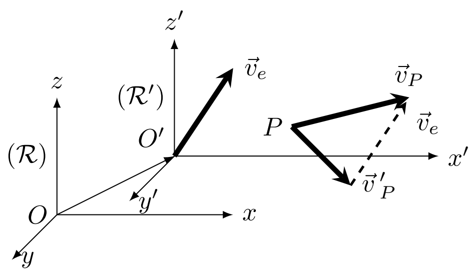


- ✓ On peut matérialiser un référentiel par un solide.
- ✓ La vitesse $\vec{v}_e$ n'est pas obligatoirement constante.
- ✓ Par la suite, $(\mathcal{R})$ sera le référentiel absolu, $(\mathcal{R}')$ le référentiel relatif.

[S1.2] Composition des vitesses et des accélérations

Soit $(\mathcal{R}')$ un référentiel en translation dans $(\mathcal{R})$ de vitesse $\vec{v}_e$. Soient $\vec{v}_P$ et $\vec{v}'_P$ les vecteurs vitesses d'un point P dans les deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ respectivement. Alors :

$$\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_e.$$

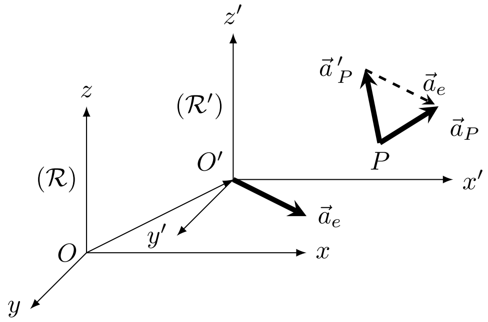


✓ $\vec{v}_P$ est la vitesse absolue, $\vec{v}\,'_P$ est la vitesse relative.

✓ $\vec{v}_e$ est, dans la cas de la translation, la même pour tous les points P.

Soit $(\mathcal{R}')$ un référentiel en translation dans $(\mathcal{R})$ de vitesse $\vec{v}_e$ et d'accélération $\vec{a}_e = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_e}{\mathrm{d}t}$. Soient $\vec{a}_P$ et $\vec{a}\,'_P$ les vecteurs accélérations d'un point P dans les deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ respectivement. Alors :

$$\vec{a}_P = \vec{a}\,'_P + \vec{a}_e.$$



✓ $\vec{a}_P$ est l'accélération absolue, $\vec{a}\,'_P$ est l'accélération relative.

✓ Si $\vec{a}_e = \vec{0}$, les deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme. Dans ce cas, $(\mathcal{R}')$ est galiléen si $(\mathcal{R})$ l'est.

[S1.3] Lois de la dynamique dans $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ en translation

Le référentiel $(\mathcal{R})$ est supposé galiléen, le référentiel $(\mathcal{R}')$ est en translation par rapport à $(\mathcal{R})$. Dans $(\mathcal{R}')$, la seconde loi de Newton s'écrit, pour un point matériel de masse m :

$$m\,\vec{a}\,'_P = \vec{f} + \vec{f}_{ie}.$$

$\vec{f}$ est la résultante des forces d'interaction s'exerçant sur la masse m, $\vec{f}_{ie} = -m\,\vec{a}_e$ est la force d'inertie d'entraînement.

✓ $\vec{f}_{ie}$ n'est pas une force d'interaction. Il n'existe pas de système ou de champ qui exercerait cette force d'inertie.

✓ La force d'inertie d'entraînement est ici uniforme mais non nécessairement constante.

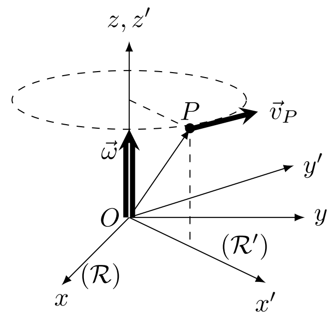
[S1.4] Rotation uniforme d'un référentiel autour d'un axe fixe

Soit $(\mathcal{R})$ un référentiel absolu. Un référentiel relatif $(\mathcal{R}')$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe de $(\mathcal{R})$ si tous les bipoints fixes dans $(\mathcal{R}')$ tournent, dans

$(\mathcal{R})$, à vitesse angulaire constante. Les points de $\mathcal{R}'$ fixes dans $\mathcal{R}$ forment l'axe de rotation.

✓ On peut toujours choisir les axes Oz et Oz', liés aux deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ respectivement, confondus avec l'axe de rotation.

La rotation de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$ est décrite quantitativement par le vecteur rotation $\vec{\omega}$.



Ce vecteur permet d'exprimer la vitesse d'un point P quelconque, fixe dans $(\mathcal{R}')$ et de vitesse $\vec{v}_P$ dans $(\mathcal{R})$:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP},$$

où O est un point de l'axe de rotation.
On en déduit que la différence des vitesses de deux points P_1 et P_2 est :

$$\vec{v}_{P_2} - \vec{v}_{P_1} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{P_1P_2}.$$

✓ La rotation uniforme implique que le vecteur $\vec{\omega}$ est constant.

L'accélération du point P est :

$$\vec{a}_P = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}) = -\omega^2\, r\, \vec{e}_r,$$

dans la base locale cylindrique.

[S1.5] Formule de dérivation composée

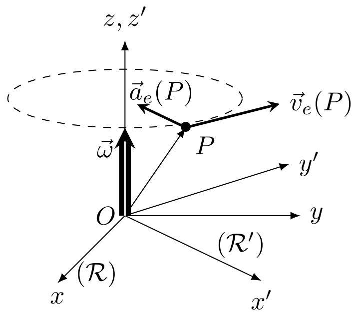
Les dérivées par rapport au temps d'un vecteur quelconque $\vec{A}$ dans les deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ sont liées par :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{(\mathcal{R})} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{(\mathcal{R}')} + \vec{\omega} \wedge \vec{A}.$$

✓ Le terme $\vec{\omega} \wedge \vec{A}$ est dû à la rotation des vecteurs de base de $(\mathcal{R}')$ par rapport à $(\mathcal{R})$. Dans le cas d'une translation des référentiels, $\vec{\omega} = \vec{0}$, les dérivées sont égales.

[S1.6] Composition des vitesses et des accélérations

Soit un référentiel $(\mathcal{R}')$ en rotation uniforme d'axe Oz par rapport au référentiel $(\mathcal{R})$, de vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$.



Soient $\vec{v}_P$ et $\vec{v}\,'_P$ les vecteurs vitesses d'un point P mobile dans les deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ respectivement. Alors :

$$\vec{v}_P = \vec{v}\,'_P + \vec{v}_e(P), \text{ avec } \vec{v}_e(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}.$$

$\vec{v}_e(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP}$ est la vitesse d'entraînement du point P. Il s'agit de la vitesse du point fixe dans $(\mathcal{R}')$ coïncidant avec P.

✓ Contrairement au cas de la translation, la vitesse d'entraînement dépend de la position du point P.

Soient $\vec{a}_P$ et $\vec{a}\,'_P$ les vecteurs vitesses d'un point P dans les deux référentiels $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ respectivement. Alors :

$$\vec{a}_P = \vec{a}\,'_P + \vec{a}_e(P) + \vec{a}_c$$

où :

$$\vec{a}_e(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$

et :

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}\,'_P.$$

- $\vec{a}_e(P) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$ est l'accélération d'entraînement du point P. Il s'agit de l'accélération du point fixe dans $(\mathcal{R}')$ coïncidant avec P.
- $\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}\,'_P$ est l'accélération de Coriolis.

✓ L'accélération d'entraînement dépend, comme la vitesse d'entraînement, de la position de P. L'accélération de Coriolis dépend de la vitesse relative de P.

[S1.7] Lois de la dynamique dans $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ en rotation uniforme

Dans $(\mathcal{R})$ galiléen, la seconde loi de Newton s'écrit :

$$m\,\vec{a}_P = \vec{f}.$$

Dans $(\mathcal{R}')$ en rotation uniforme par rapport à $(\mathcal{R})$, la seconde loi de Newton s'écrit :

$$m\,\vec{a}'_P = \vec{f} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

$$\text{où } \vec{f}_{ie} = -m\,\vec{a}_e(P) = -m\,\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OP})$$
$$\text{et } \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P.$$

$\vec{f}_{ie}$ est la force d'inertie d'entraînement, $\vec{f}_{ic}$ est la force d'inertie de Coriolis.

✓ L'intérêt d'introduire des forces d'inertie est de pouvoir écrire les lois de la dynamique sous la même forme (masse $\times$ accélération $=$ force), que le référentiel soit galiléen ou non.

[S1.8] Exemples de référentiels

Un référentiel est considéré galiléen « approché » dans la mesure où les forces d'inertie y ont des effets faibles, voire négligeables.

Des référentiels approximativement galiléens d'utilité pratique sont cités ci-dessous.

– Le référentiel de Copernic. Le centre de masse du système solaire y est immobile, les axes du référentiel sont dirigés vers des étoiles lointaines. On l'utilise pour décrire le mouvement des planètes et des corps célestes du système solaire.

– Le référentiel géocentrique. Le centre de la Terre y est immobile, les axes du référentiel sont dirigées vers des étoiles lointaines. Ce référentiel est utilisé pour décrire le mouvement des satellites de la Terre. Le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel de Copernic, le centre de la Terre y parcourant une ellipse en une durée de 365 jours 6 h 9 min 9,7676 s (année sidérale).

– Le référentiel terrestre, lié à la Terre. C'est le référentiel habituellement utilisé pour décrire les mouvements qui ont lieu au voisinage du sol. Il est en rotation quasi-uniforme autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique. La période de rotation est 23 h 56 min 4,1 s (jour sidéral).

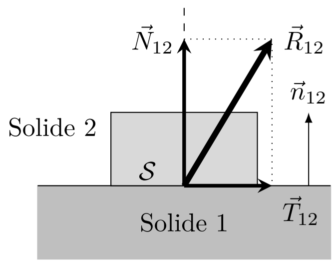
Thème 2 - Le frottement solide

[S2.1] Forces de contact entre solides

Le contact entre deux solides est qualifié de sec lorsque les surfaces des solides sont en contact direct, sans qu'aucun lubrifiant liquide ou solide pulvérulent ne soit placé entre eux.
Les forces de contact sont réparties sur toute la surface commune des deux solides. Il n'existe pas d'expression théorique simple de ces forces. Ces forces dépendent de nombreux paramètres, par exemple :

- la nature chimique des surfaces ;
- la structure physique au niveau microscopique ;
- la nature rugueuse ou lisse ;
- l'adhérence ou le glissement d'une surface sur l'autre.

Soit $\mathcal{S}$ la surface commune des deux solides, supposée plane. On peut alors définir une direction normale à $\mathcal{S}$ orientée par le vecteur unitaire $\vec{n}_{12}$ du solide 1 vers le solide 2.



Soit $\vec{R}_{12}$ la résultante des forces de contact du solide 1 vers le solide 2. Ce vecteur se décompose en une composante normale :

$$\vec{N}_{12} = (\vec{n}_{12} \cdot \vec{R}_{12})\, \vec{n}_{12},$$

appelée **réaction** (normale) du solide 1 vers le solide 2, et une composante tangentielle :

$$\vec{T}_{12} = \vec{R}_{12} - \vec{N}_{12},$$

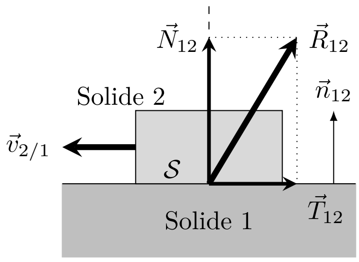
appelée **force de frottement**.

✓ La composante normale empêche la pénétration des solides l'un dans l'autre et limite ainsi leur mouvement.

Il existe une assez bonne description empirique des forces de contact d'un solide sur un autre, ce sont les lois de Coulomb. Elles se distinguent selon que les solides sont en glissement ou en équilibre l'un par rapport à l'autre.

[S2.2] Loi de Coulomb dans le cas d'un glissement

Les deux solides sont en mouvement de glissement l'un sur l'autre. Ce mouvement est décrit par la vitesse de glissement $\vec{v}_{2/1} \neq \vec{0}$ du solide 2 par rapport au solide 1, c'est-à-dire la vitesse du solide 2 dans le référentiel matérialisé par le solide 1.



La loi de Coulomb du glissement s'écrit :

$$\|\vec{T}_{12}\| = f_c \, \|\vec{N}_{12}\|,$$
$$\vec{T}_{12} \text{ opposé à } \vec{v}_{2/1}.$$

Le coefficient f_c, sans dimension, est le **coefficient de frottement cinétique**. Il dépend de la nature des surfaces en contact mais ni de la vitesse de glissement, ni des forces.

✓ La valeur nulle $f_c = 0$ décrit un contact sans frottement et entraîne la nullité de la force de frottement.

✓ Habituellement, les valeurs du coefficient f_c sont de l'ordre de quelques dixièmes d'unité. Les valeurs au-delà de 1 sont rares et à la limite de validité de la loi de Coulomb.

[S2.3] Loi de Coulomb dans le cas de l'équilibre

Il y a équilibre relatif si l'un des solides est et reste immobile par rapport à l'autre. La vitesse de glissement est nulle. Dans ce cas, la loi de Coulomb s'écrit sous la forme d'une inégalité :

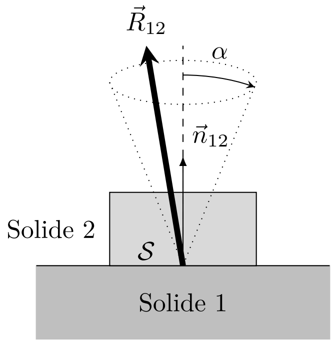
$$\|\vec{T}_{12}\| \leqslant f_s \, \|\vec{N}_{12}\|,$$

où le coefficient f_s est appelé **coefficient de frottement statique**.

Comme f_c, f_s est sans dimension. Il est en général légèrement plus grand que le coefficient de frottement cinétique mais très souvent, il est confondu avec celui-ci :

$$f_s \simeq f_c.$$

Géométriquement, cette inégalité se représente sous la forme d'un cône de frottement d'axe $\vec{n}_{12}$ et de demi-angle au sommet $\alpha = \arctan f_s$, dans lequel se trouve le vecteur $\vec{R}_{12}$ tant que l'équilibre subsiste.



[S2.4] Puissance des forces de contact

La puissance $\mathcal{P}$ de la résultante des forces de contact est :

$$\mathcal{P} = \vec{R}_{12} \cdot \vec{v}_{2/1} = \vec{T}_{12} \cdot \vec{v}_{2/1}.$$

La puissance ne dépend que de la force de frottement $\vec{T}_{12}$ et de la vitesse de glissement $\vec{v}_{2/1}$. On en conclut qu'il y a deux raisons principales pour lesquelles la puissance est nulle :

– il n'y a pas de frottement, $f_c = 0$;
– il n'y a pas de glissement, $\vec{v}_{2/1} = \vec{0}$.

Dans le cas du glissement avec frottement, la puissance des forces de contact est négative, puisque $\vec{T}_{12}$ et $\vec{v}_{2/1}$ sont deux vecteurs opposés, selon la loi de Coulomb. Ainsi, dans le cas général :

$$\mathcal{P} \leqslant 0.$$