

Table des matières

Avant-propos	iii
L'approche du livre	iii
Le contenu du livre	iv
1 Probabilités et jeux de hasard	1
1.1 Introduction	1
1.1.1 Motivation	1
1.1.2 Plan du chapitre	2
1.2 Concepts fondamentaux	2
1.2.1 Événement aléatoire	2
1.2.2 Probabilité d'un événement	3
1.2.3 Événements indépendants	5
1.2.4 Exemples de calculs de probabilités	6
1.3 Analyse combinatoire	8
1.3.1 Permutations	9
1.3.2 Arrangements	9
1.3.3 Combinaisons	11
1.3.4 Binôme de Newton	12
1.3.5 Probabilité de gain au loto	14
1.4 Caractéristiques d'une loi de probabilité	16
1.4.1 Espérance de gain	16
1.4.2 Peut-on battre le casino ?	19
1.4.3 Probabilités et intuition	22
1.5 Perspectives	23
1.6 Annexe : coefficients multinomiaux	23
1.7 Exercices	25
2 Limites	27
2.1 Introduction	27
2.1.1 Surfaces délimitées par des lignes courbes	27
2.1.2 Plan du chapitre	28
2.2 Méthode de l'exhaustion en géométrie grecque	28
2.2.1 Surfaces des figures rectilignes semblables	28
2.2.2 Surface du cercle	29

2.2.3	Périmètre du cercle	34
2.3	Limites de séries et applications	38
2.3.1	Somme des termes d'une suite géométrique infinie	38
2.3.2	Surfaces sous des courbes polynomiales	39
2.3.3	Le mouvement uniformément accéléré	42
2.3.4	Surface sous les courbes $y = x^r$, avec r rationnel	44
2.4	Aspects théoriques	46
2.4.1	Limite d'une suite	46
2.4.2	Limites d'une fonction	47
2.4.3	Propriétés des limites	48
2.4.4	Une définition plus rigoureuse de la continuité	51
2.4.5	Quelles fonctions sont continues et en quels points?	52
2.5	Perspectives	54
2.6	Exercices	54
3	Dérivées (1)	57
3.1	Introduction	57
3.1.1	Motivation	57
3.1.2	Plan du chapitre	58
3.2	Dérivées et tangentes à une courbe	58
3.2.1	Coefficient angulaire d'une droite	58
3.2.2	La tangente comme limite de la sécante	59
3.2.3	Fonction dérivée	60
3.3	Calcul de dérivées	62
3.3.1	Puissances entières positives	62
3.3.2	Racines	63
3.3.3	Dérivées de sommes, produits et quotients	64
3.3.4	Parité de la dérivée	68
3.3.5	La dérivée n'est pas toujours définie partout	69
3.4	Étude de fonctions	71
3.4.1	Croissance et décroissance des fonctions dérivables	71
3.4.2	Minima et maxima	72
3.4.3	Plus grande et plus petite valeur d'une fonction	75
3.4.4	La boîte de conserve optimale	75
3.4.5	Dérivées et taux de variation des fonctions	78
3.5	Perspectives	79
3.6	Exercices	79
4	Applications des dérivées	81
4.1	Introduction	81
4.2	Résolution numérique d'équations par la méthode de la tangente	81
4.2.1	La méthode de la tangente	81
4.2.2	Application au calcul de la racine carrée	83
4.2.3	Racines d'ordre quelconque	86
4.2.4	Les équations polynomiales	88
4.2.5	Les équations quelconques	90

4.2.6	Racines multiples	91
4.3	Nombre de solutions des équations du troisième degré	93
4.3.1	Forme réduite	94
4.3.2	Discriminant et nombre de solutions	95
4.4	Perspectives	97
4.5	Annexe	97
4.5.1	La méthode de la sécante	97
4.5.2	Comparaison des méthodes de la tangente et de la sécante	97
4.6	Exercices	100
5	Dérivées (2)	101
5.1	Introduction	101
5.2	Fonctions	101
5.2.1	Domaine et image	101
5.2.2	Composée de deux fonctions	102
5.2.3	Fonction inverse	105
5.3	Dérivées des fonctions inverses	105
5.4	Dérivées des fonctions composées	107
5.5	Fonctions trigonométriques	109
5.5.1	Dérivées des fonctions sinus et cosinus	109
5.5.2	Limite du sinus pour de petits angles	110
5.5.3	Une autre unité de mesure d'angle : le radian	111
5.5.4	Dérivées des autres fonctions trigonométriques	112
5.6	Fonctions exponentielles et logarithmes	113
5.6.1	La table de logarithmes de Briggs	113
5.6.2	Dérivées des fonctions logarithmes	114
5.6.3	Calcul de e	115
5.6.4	Dérivées des fonctions exponentielles et puissances	119
5.7	Applications	120
5.7.1	Quel est le meilleur endroit pour transformer un essai au rugby?	120
5.7.2	Propriétés des foyers des coniques	122
5.8	Perspectives	125
5.9	Exercices	125
6	Analyse de fonctions	127
6.1	Introduction	127
6.1.1	Motivation	127
6.1.2	Plan du chapitre	127
6.2	Dérivée seconde, concavité et points d'inflexion	128
6.3	Singularités dues à des divisions par 0	131
6.3.1	Limites égales à $+\infty$ ou $-\infty$	131
6.3.2	Limites égales à un nombre réel	133
6.3.3	Limites inexistantes	133
6.4	Vraies valeurs des indéterminations du type $0/0$	134
6.4.1	Fonctions rationnelles	134

6.4.2	Fonctions faisant intervenir des racines	135
6.4.3	Théorèmes de Rolle, Lagrange, Cauchy	136
6.4.4	Règle de L'Hospital	139
6.5	Comportement des fonctions à l'infini	141
6.5.1	Valeurs limites des fonctions puissances et de leurs quotients, produits, sommes et racines	141
6.5.2	Valeurs limites de quotients de fonctions exponentielles, logarithmes et puissances	143
6.5.3	Approximations au moyen de fonctions simples	145
6.6	Indéterminations de la forme 0∞ , 0^0 , ∞/∞	148
6.7	Exercices	149
7	Représentations des courbes	151
7.1	Introduction	151
7.1.1	Motivation	151
7.1.2	Plan du chapitre	152
7.2	Courbes en coordonnées polaires	152
7.2.1	Un système non cartésien : les coordonnées polaires . . .	152
7.2.2	Cercles, droites et autres courbes	153
7.2.3	Coniques	154
7.3	Équations paramétriques des courbes	155
7.3.1	Droites	156
7.3.2	Cercles	157
7.3.3	Liens entre les représentations d'une courbe	157
7.3.4	Ellipses	158
7.3.5	Hyperboles	159
7.4	Fonctions hyperboliques	159
7.4.1	Propriétés	159
7.4.2	Fonctions hyperboliques inverses	160
7.4.3	Dérivées des fonctions hyperboliques et de leurs inverses .	162
7.5	Annexe : représentation paramétrique des hypocycloïdes	162
7.6	Exercices	164
8	Intégrales (1)	165
8.1	Introduction	165
8.1.1	Motivation	165
8.1.2	Plan du chapitre	166
8.2	Le théorème fondamental du calcul intégral	166
8.3	Primitives simples	169
8.3.1	Primitives immédiates	169
8.3.2	Propriétés des primitives	171
8.3.3	Primitives similaires aux primitives immédiates	172
8.4	Primitivation par réécriture de l'intégrande	173
8.4.1	Produits de sinus et cosinus	173
8.4.2	Fonctions rationnelles	175
8.5	Intégration par parties	177

8.5.1	Formule	177
8.5.2	Produit de x^k et de fonctions transcendantes	177
8.6	Méthodes numériques d'intégration	179
8.6.1	Les primitives de fonctions élémentaires ne sont pas nécessairement des fonctions élémentaires	179
8.6.2	Méthode de Simpson	180
8.7	Perspectives	183
8.8	Exercices	184
9	Intégrales (2)	185
9.1	Introduction	185
9.2	Changement de variable	185
9.2.1	Le principe et les calculs dans un cas particulier	185
9.2.2	Formule et exemples	187
9.2.3	Combinaisons de fonctions trigonométriques	188
9.2.4	Racines carrées de facteurs quadratiques	190
9.2.5	Interprétation géométrique d'une représentation paramétrique des ellipses et hyperboles	191
9.3	Intégration des fonctions rationnelles quelconques	192
9.4	Généralisation de la notion d'intégrale	194
9.4.1	Intervalle d'intégration non borné	194
9.4.2	Fonctions discontinues	196
9.4.3	Évaluation numérique des intégrales impropres	198
9.4.4	Définition de la surface sous une courbe	200
9.5	Perspectives	201
9.6	Exercices	202
10	Développements en série	203
10.1	Introduction	203
10.1.1	Motivation	203
10.1.2	Plan du chapitre	204
10.2	Série géométrique et séries apparentées	204
10.2.1	Fonction $1/(1 - x)$	204
10.2.2	Fonction $\ln(1 - x)$	206
10.2.3	Fonction $\arctan x$	208
10.3	Preuves et algorithmes	210
10.3.1	Preuve pour la fonction $\ln(1 - x)$	210
10.3.2	Algorithme de calcul du logarithme népérien	211
10.3.3	Un autre algorithme de calcul du logarithme népérien	212
10.3.4	Preuve pour la fonction $\arctan x$	214
10.4	Arc tangente et calcul de π	214
10.5	Développements en série de Taylor d'autres fonctions	217
10.5.1	Polynômes de Taylor	218
10.5.2	Polynômes de Taylor de e^x , $\sin x$, $\cos x$	219
10.5.3	Limite des polynômes de Taylor	222
10.5.4	Polynômes de Taylor de $(1 + x)^r$	224

10.5.5	Polynômes de Taylor de $\arcsin x$, $\arccos x$	225
10.6	Preuves et algorithmes	225
10.6.1	Théorème de Taylor-Lagrange-Cauchy	226
10.6.2	Preuve pour les fonctions e^x , $\sin x$, $\cos x$	228
10.6.3	Algorithmes de calcul de e^x , $\sin x$, $\cos x$	230
10.6.4	Preuve pour $(1+x)^r$	231
10.6.5	Preuve pour $\arcsin x$, $\arccos x$	233
10.7	Calcul de limites	234
10.8	Perspectives	234
10.9	Exercices	234
11	L'art de conjecturer	237
11.1	Introduction	237
11.1.1	Motivation	237
11.1.2	Plan du chapitre	237
11.2	Générateurs de nombres aléatoires	238
11.2.1	À quoi ressemble le hasard ?	238
11.2.2	Générateurs algorithmiques	239
11.2.3	Comment le nombre de piles s'approche-t-il de la moyenne ?	241
11.2.4	Modélisation d'une roulette	242
11.3	Les sondages sont-ils fiables ?	245
11.3.1	Les difficultés du sondage	245
11.3.2	Distribution de probabilité des résultats du sondage	246
11.3.3	Probabilité que le sondage désigne le vainqueur	249
11.3.4	Un intervalle de confiance pour le résultat de l'élection	254
11.3.5	La limite de la loi binomiale lorsque $n \rightarrow \infty$	258
11.4	Perspectives	262
11.5	Annexe	262
11.5.1	Générateurs congruentiels linéaires	262
11.5.2	Démonstration de la formule de de Moivre-Stirling	266
11.6	Exercices	271
12	Résolution des systèmes d'équations linéaires au moyen de déterminants	273
12.1	Introduction	273
12.1.1	Motivation	273
12.1.2	Plan du chapitre	273
12.2	Solutions des systèmes réguliers si $n \leq 3$	274
12.2.1	Formule pour $n = 1$	274
12.2.2	Formule pour $n = 2$	274
12.2.3	Formule pour $n = 3$	275
12.3	Solutions et déterminants si $n \leq 3$	276
12.3.1	Une structure très particulière	276
12.3.2	Définition des déterminants ($n \leq 3$)	277
12.3.3	Solution en termes de quotients de déterminants	277

12.3.4	Propriétés des déterminants pour $n = 1, 2, 3$	278
12.3.5	Une autre expression du déterminant	282
12.4	Déterminants pour n quelconque	283
12.4.1	Définition	283
12.4.2	Propriétés	285
12.5	Solution des systèmes pour n quelconque	287
12.5.1	Solution en termes de quotients de déterminants	287
12.5.2	Preuve	287
12.6	Temps de calcul et efficacité pratique	289
12.7	Perspectives	291
12.8	Exercices	291
13	Vecteurs	293
13.1	Introduction	293
13.1.1	Motivation	293
13.1.2	Plan du chapitre	294
13.2	Déplacements et vecteurs dans le plan	294
13.2.1	Définition et propriétés	294
13.2.2	Applications en géométrie	298
13.3	Produit scalaire	300
13.3.1	Définition et propriétés	300
13.3.2	Applications	303
13.4	Composantes d'un vecteur	304
13.4.1	Applications	306
13.5	Rotations	310
13.5.1	Effet des rotations sur les composantes des vecteurs	310
13.5.2	Propriétés d'invariance du produit scalaire	311
13.5.3	Produit scalaire en termes des composantes des vecteurs	312
13.5.4	Vecteur perpendiculaire à un plan	315
13.6	Perspectives	315
13.7	Exercices	315
14	Signification géométrique du déterminant	317
14.1	Introduction	317
14.1.1	Motivation	317
14.1.2	Plan du chapitre	317
14.2	Surfaces, volumes et déterminants	318
14.2.1	Surface du parallélogramme par découpage	318
14.2.2	Surface du parallélogramme par transformations	319
14.2.3	Volume du parallélépipède et généralisations en dimension n	321
14.3	Signification géométrique du déterminant du tableau des coefficients a_{ij} d'un système linéaire	322
14.3.1	Application : détection des systèmes mal conditionnés	324
14.4	Peut-on définir un autre produit de vecteurs ?	327
14.4.1	Propriétés requises	327

14.4.2	Le produit \wedge	329
14.5	Perspectives	332
14.6	Exercices	332
15	Nombres complexes	333
15.1	Introduction	333
15.1.1	Les nombres réels	333
15.1.2	Équation du troisième degré et nombres complexes	334
15.1.3	Plan du chapitre	334
15.2	Équation polynomiale du troisième degré	335
15.2.1	Forme réduite de l'équation	335
15.2.2	Solution de l'équation réduite	335
15.3	Nombres imaginaires et nombres complexes	339
15.3.1	Les nombres imaginaires	339
15.3.2	Les nombres complexes	340
15.3.3	Le plan complexe	341
15.3.4	Racines cubiques des nombres complexes	344
15.4	L'équation du troisième degré avec discriminant négatif	346
15.4.1	Découverte de la formule grâce aux nombres complexes	346
15.4.2	Preuve de la formule	347
15.4.3	Exemple avec $\Delta < 0$	347
15.5	Fonctions trigonométriques et exponentielles	348
15.5.1	Des équations fonctionnelles apparentées	349
15.5.2	La fonction exponentielle d'argument imaginaire	350
15.5.3	La fonction exponentielle d'argument complexe	351
15.5.4	Démystifions $e^{i\pi} + 1 = 0$	351
15.6	Factorisation des polynômes	352
15.6.1	Polynômes de degré 2 et 3	352
15.6.2	Factorisation totale sur les nombres complexes	354
15.6.3	Factorisation partielle sur les nombres réels	355
15.6.4	Simplification de quotients de polynômes au moyen du PGCD	356
15.7	Perspectives	358
15.7.1	Résolution des équations polynomiales	358
15.7.2	Existe-t-il d'autres nombres ?	358
15.8	Annexe	359
15.8.1	Racines carrées de nombres complexes	359
15.8.2	Preuve du théorème de factorisation des polynômes sur \mathbb{C}	360
15.9	Exercices	363
16	Équations différentielles	365
16.1	Introduction	365
16.1.1	Motivation	365
16.1.2	Plan du chapitre	366
16.2	Systèmes mécaniques et équations différentielles	366
16.2.1	Mouvement en l'absence de forces	366

16.2.2	Chute d'un corps sans résistance de l'air	367
16.2.3	Chute d'un corps avec résistance de l'air	367
16.2.4	L'oscillateur harmonique	370
16.3	Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants	373
16.3.1	Équations du premier ordre	373
16.3.2	Équations du deuxième ordre	375
16.4	Résolution numérique des équations différentielles	382
16.4.1	Équations du premier ordre : méthode d'Euler simple	383
16.4.2	Équations du premier ordre : méthodes améliorées	385
16.4.3	Équations du deuxième ordre sans dérivée première	387
16.4.4	Équations du deuxième ordre générales	388
16.4.5	L'interaction gravitationnelle entre deux corps	389
16.5	Perspectives	395
16.6	Annexe	396
16.6.1	Solution particulière des équations linéaires à coefficients constants	396
16.6.2	Équations à variables séparables	397
16.6.3	Existence et unicité de la solution des équations du premier ordre	397
16.6.4	Convergence de la solution numérique d'un problème avec $y'' = -y$	400
16.7	Exercices	401
17	Variables aléatoires	403
17.1	Introduction	403
17.1.1	Motivation	403
17.1.2	Plan du chapitre	403
17.2	Variables aléatoires et distributions de probabilité	404
17.2.1	Notion de variable aléatoire	404
17.2.2	Loi de Poisson	405
17.2.3	Lois de probabilité continues	408
17.2.4	Variables aléatoires indépendantes et dépendantes	414
17.2.5	Fonctions et sommes de variables aléatoires	415
17.3	Caractéristiques d'une variable aléatoire	419
17.3.1	Espérance	419
17.3.2	Propriétés de l'espérance	423
17.3.3	Variance et écart-type	426
17.3.4	Propriétés de la variance et de l'écart-type	429
17.3.5	Écart-type et largeur de la loi de probabilité	430
17.4	Théorèmes limites	432
17.4.1	Loi des grands nombres	432
17.4.2	Théorème central-limite et applications	433
17.5	Perspectives	439
17.6	Annexe	440
17.6.1	Propriétés de la loi normale	440

17.6.2	Générateurs de nombres aléatoires non uniformément distribués	442
17.7	Exercices	443
18	Probabilités conditionnelles et formules de Bayes	445
18.1	Introduction	445
18.2	Probabilités conditionnelles	445
18.2.1	Probabilités et théorie des ensembles	445
18.2.2	Définition des probabilités conditionnelles	447
18.3	Formules de Bayes et applications	448
18.3.1	Formules de Bayes	448
18.3.2	Sondages avec probabilité a priori uniforme	449
18.3.3	Sondages avec probabilité a priori non uniforme	453
18.4	Exercices	456
19	Applications du calcul différentiel et intégral	457
19.1	Introduction	457
19.2	Méthode des moindres carrés	457
19.2.1	Principes et justification de la méthode	457
19.2.2	Modélisation par une fonction linéaire	461
19.2.3	Coefficient de détermination	462
19.2.4	D'autres modélisations	464
19.3	Centre de gravité d'une figure plane homogène	466
19.4	Longueurs des courbes	468
19.4.1	Formule générale et exemples	468
19.4.2	Périmètre de l'ellipse	470
19.4.3	Périmètre de l'ellipse : une formule symétrique sous l'échange de a et b	474
19.5	Rayon de courbure et courbure d'une courbe	476
19.5.1	Cercle et rayon de courbure	476
19.5.2	Courbure d'une courbe	481
19.6	Courbes renvoyant les rayons parallèles vers un seul point	483
19.6.1	Coefficient angulaire des rayons réfléchis	484
19.6.2	Équation différentielle satisfaite par les courbes	484
19.7	Exercices	487
A	Quelques formules et définitions élémentaires	489
A.1	Algèbre	489
A.1.1	Formules utiles	489
A.1.2	Résolution d'équations et d'inéquations	491
A.2	Géométrie euclidienne	491
A.3	Géométrie analytique	492
A.4	Fonctions	493
A.5	Fonctions exponentielles et logarithmes	493
A.6	Trigonométrie	494
A.6.1	Triangles	494

A.6.2	Fonctions trigonométriques	496
A.7	Coniques	498
A.8	Systèmes d'équations	499
B	Logique et mathématiques	501
B.1	Introduction	501
B.2	La logique classique	502
B.2.1	Opérateurs « et », « ou », « non »	502
B.2.2	Équivalence et implication	503
B.2.3	Théorèmes logiques	504
B.3	Exercices	505
C	Covariance et coefficient de corrélation linéaire	507
C.1	Introduction	507
C.2	Covariance	507
C.3	Coefficient de corrélation linéaire	508
C.4	Analogie géométrique	509
D	Solutions des exercices	511
D.1	Probabilités et jeux de hasard	511
D.2	Limites	515
D.3	Dérivées (1)	517
D.4	Applications des dérivées	521
D.5	Dérivées (2)	523
D.6	Analyse de fonctions	527
D.7	Représentations des courbes	534
D.8	Intégrales (1)	536
D.9	Intégrales (2)	538
D.10	Développements en série	543
D.11	L'art de conjecturer	548
D.12	Résolution des systèmes d'équations linéaires au moyen de déterminants	553
D.13	Vecteurs	554
D.14	Signification géométrique du déterminant	556
D.15	Nombres complexes	557
D.16	Équations différentielles	560
D.17	Variables aléatoires	567
D.18	Probabilités conditionnelles et formules de Bayes	575
D.19	Applications du calcul différentiel et intégral	576
D.20	Logique et mathématiques	580
	Bibliographie	581
	Index	583