# Chapitre 1

# Probabilités et jeux de hasard

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Motivation

Alors que la géométrie, l'algèbre et l'analyse ont des racines qui remontent à l'Antiquité, les probabilités n'ont vraiment fait leur entrée en mathématiques que dans la deuxième moitié du XVII$^{e}$ siècle.

Leur étude a commencé avec l'attention portée par Pascal, Fermat et Huygens à une compréhension théorique des jeux de hasard.

On peut risquer différentes hypothèses quant à la raison de débuts si tardifs. Les jeux de hasard étaient peut-être considérés auparavant comme un sujet trop futile, ou trop immoral. Les problèmes résolus par les applications modernes de la théorie des probabilités (comme l'analyse des sondages d'opinion) ne se posaient pas encore. Le raisonnement probabiliste fait peu appel à l'intuition, contrairement à la géométrie. Et il n'est pas évident qu'on puisse avancer quelque chose de certain à propos de l'incertain.

Cette théorie s'est ensuite considérablement développée et est aujourd'hui une des disciplines mathématiques avec le plus d'applications concrètes : en statistiques avec l'interprétation des données, en physique, en médecine, en psychologie, en finance, en économie, etc.

Dans ce premier chapitre sur la théorie des probabilités, nous commencerons nous aussi par nous pencher sur les jeux de hasard, et nous nous efforcerons de répondre à quelques questions qu'ils suscitent.

Comment calculer la probabilité de gain au loto ? Est-il possible de battre le casino si on applique la bonne stratégie ? Faut-il noter les derniers numéros sortis et essayer d'en tirer une prédiction ?

### 1.1.2 Plan du chapitre

Après avoir passé en revue les concepts fondamentaux dans la section 2, nous étudierons l'analyse combinatoire dans la section 3 et nous montrerons comment elle permet de calculer les probabilités de gain à un jeu de hasard comme le loto.

Nous définirons la notion d'espérance de gain dans la section 4 et nous expliquerons comment elle aide entre autres à interpréter les martingales. Son rôle est vraiment celui d'un « juge de paix ».

Une section intitulée « Perspectives » évoquera des développements traités dans des chapitres ultérieurs.

Nous terminerons par une annexe sur des points moins importants et par des exercices.

Des sections « Perspectives » et « Exercices » apparaîtront dans la plupart des chapitres et ne seront dorénavant plus mentionnées dans le plan.

## 1.2 Concepts fondamentaux

### 1.2.1 Événement aléatoire

Si on lance une pièce en la gardant bien horizontale vers une table toute proche, la pièce ne se retournera pas. Le résultat de l'expérience est donc connu à l'avance. Si au contraire on la lance en la faisant tourner rapidement, il sera très difficile de prédire de quel côté elle retombera.

Les équations qui régissent son mouvement sont déterministes et permettent en principe de calculer sa trajectoire. Mais il faut pour cela connaître parfaitement la position et la vitesse initiales. Lorsque la pièce est animée d'un mouvement de rotation rapide, le résultat est extrêmement sensible aux conditions initiales, c.-à-d. à la manière dont elle est lancée. Une différence infime la fera tomber du côté pile plutôt que face.

La notion d'événement aléatoire [1] est une abstraction et une idéalisation de la seconde version du lancer de la pièce : le résultat est supposé être parfaitement imprévisible. C'est donc une abstraction d'un dispositif expérimental, un peu comme la droite géométrique d'épaisseur nulle est une idéalisation d'une corde d'épaisseur non nulle.

L'état de l'atmosphère est décrit par des équations qui sont elles aussi très sensibles aux conditions initiales. Il est évidemment impossible de mesurer partout sur le globe et à toutes les altitudes les quantités nécessaires (température, pression, humidité, vitesse du vent, etc.). Et de toute façon, les programmes de calcul ne peuvent pas traiter une infinité de données.

Ces équations ont pour caractéristique que les différences entre la réalité et la situation modélisée *augmentent* rapidement au cours du temps (c'est l'effet « papillon »). C'est pour cela que les prévisions météorologiques ne sont pas fiables à long terme.

1. L'étymologie du mot « aléatoire », comme celle de « hasard », renvoie aux jeux de hasard. L'un vient du latin « alea » qui signifiait « le dé » (ou « le jeu de dés »), et l'autre de l'arabe « al-zahr » qui désignait « les dés » !

C'est donc ici aussi l'impossibilité pratique de connaître parfaitement les conditions initiales et de faire les calculs exactement qui nous amène à considérer le temps qu'il fera dans un an comme un événement aléatoire.

Les résultats des expériences de mécanique quantique sont en revanche vraiment aléatoires : c'est une impossibilité de principe (du moins si nos théories actuelles sont justes) qui nous empêche de dire si tel atome radioactif particulier va se désintégrer ou pas.

La nature du hasard en physique (reflet de notre ignorance ou phénomène fondamental ?) est cependant sans importance pour la théorie des probabilités qui, comme le reste des mathématiques, repose sur des axiomes.

### 1.2.2 Probabilité d'un événement

#### Un peu d'axiomatique

On associe à chaque résultat possible d'une expérience aléatoire un nombre appelé probabilité et compris entre 0 et 1.

Si deux résultats d'une expérience aléatoire sont incompatibles, la probabilité d'obtenir l'un quelconque de ces résultats est la somme de leurs probabilités.

La somme des probabilités d'un ensemble complet d'événements incompatibles est 1.

#### Exemples

Commençons par le lancer d'une pièce de monnaie, en excluant les rares cas où elle restera sur la tranche.

Les axiomes impliquent que $P(\text{pile}) + P(\text{face}) = 1$, mais cela ne suffit pas pour déterminer les probabilités des deux résultats possibles. On doit faire appel à l'hypothèse que la pièce est bien équilibrée et qu'il n'y a donc pas de raison que pile sorte plus souvent que face : $P(\text{pile}) = P(\text{face})$. On déduit alors

$$P(\text{pile}) = \frac{1}{2}\ ; \quad P(\text{face}) = \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

De façon analogue, le lancer d'un dé peut donner 1, 2, ..., 6, avec, par symétrie,

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6} \tag{1.2}$$

On est souvent amené à calculer la probabilité d'un certain sous-ensemble de résultats parmi tous ceux qui sont possibles. Lorsque tous les résultats « élémentaires » ont la même probabilité, les axiomes impliquent que la probabilité associée à ce sous-ensemble est :

$$P = \frac{\text{nombre de résultats favorables}}{\text{nombre de résultats possibles}} \tag{1.3}$$

Calculons par exemple la probabilité qu'un lancer de dé donne un nombre pair. Il y a trois résultats favorables (2, 4 et 6), et donc

$$P(\text{pair}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

On calcule de même la probabilité que le résultat soit divisible par 3. Il y a deux cas favorables (3 et 6), et donc

$$P(\text{divisible par trois}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \tag{1.5}$$

Le mot « incompatible » apparaissant dans le dernier axiome est très important. Si deux événements ne sont pas incompatibles, la probabilité que l'expérience donne l'un ou l'autre de ces résultats *n'est pas* la somme des probabilités de chacun.

Ainsi la probabilité que le résultat soit pair ou divisible par 3 n'est pas $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ (car cela reviendrait à tenir compte deux fois de « 6 »). Les cas favorables sont 2, 3, 4, 6, ce qui donne $P = \frac{4}{6}$.

### Aléatoire ne signifie pas nécessairement équiprobable

Dans les expériences de lancer de pièce ou de dé, tous les résultats élémentaires ont la même probabilité. On dit qu'ils sont équiprobables.

Mais il s'agit là de cas particuliers. Si, au lieu d'un dé cubique, on lance un parallélépipède, il retombera plus souvent sur les plus grandes faces. Il n'est alors évidemment plus possible d'utiliser un simple argument de symétrie.

Les différents types de temps possibles (ensoleillé, nuageux, pluvieux, etc.) un jour donné à un endroit donné fournissent un autre exemple d'événements qui ne sont pas équiprobables.

### Comment déterminer les probabilités ?

Dans les situations les plus simples, le nombre $N$ de résultats possibles est connu et on suppose que les très légères différences entre les côtés d'une pièce, les faces d'un dé, etc. sont négligeables. Chaque résultat élémentaire a alors une probabilité de $1/N$.

Dans d'autres problèmes, les probabilités se déduisent de celles des résultats élémentaires. On montre ainsi que la probabilité que la somme des points de deux lancers de dé soit 8 est 5/36. L'essentiel du présent chapitre et du chapitre 11 sera consacré à ce genre de calculs.

Mais il existe aussi des situations où il est difficile ou impossible de procéder ainsi. La « loi des grands nombres » vient alors à notre secours. Elle affirme que la fréquence d'apparition d'un certain résultat tend vers sa probabilité lorsque le nombre d'expériences tend vers l'infini [2].

Il suffit donc de lancer beaucoup de fois le dé parallélépipédique ou de faire des relevés météorologiques pendant une très longue période. On suppose ici que

2. La première version de cette loi est due à Jacques Bernoulli, dans *Ars Conjectandi*, 1713.

les conditions extérieures sont invariables (même façon de lancer l'objet, même taux de $CO_2$ dans l'air, même activité solaire, etc.).

Les valeurs obtenues ne seront cependant pas aussi précises que celles connues a priori pour un dé cubique ou une pièce, à cause des écarts entre probabilité et fréquence. Ceux-ci sont de plus en plus petits et de plus en plus rares quand le nombre d'expériences augmente. Mais ils restent possibles, et cette possibilité est elle-même chiffrée avec une probabilité !

### 1.2.3 Événements indépendants

Deux événements sont indépendants si aucun des deux n'influence l'autre. Par exemple, si on tire à pile ou face, le résultat d'un premier lancer n'a aucun effet sur le suivant.

Plus formellement, deux événements sont (statistiquement) indépendants si la probabilité de réalisation de l'un n'est pas affectée par la réalisation ou non de l'autre.

La probabilité d'obtenir pile la première fois et face la deuxième est alors le *produit* des probabilités de chaque événement, c.-à-d. $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. La probabilité d'obtenir un 3 avec un premier dé et un 5 avec un second est $\frac{1}{6}\,\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Mais des événements se rapportant au *même* lancer de dé peuvent aussi être indépendants. La probabilité que le résultat soit pair est 1/2, et celle que le résultat soit divisible par 3 est 1/3. La probabilité que le résultat soit pair *et* divisible par 3 est 1/6 car le seul cas favorable est « 6 ». Les événements « obtenir un nombre pair » et « obtenir un multiple de 3 » sont (statistiquement) indépendants, car la probabilité d'obtenir les deux événements est le produit des probabilités de chacun : $\frac{1}{6} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$.

Notons la différence d'approche entre les deux situations : l'indépendance de deux événements est postulée lorsqu'ils se rapportent à des lancers différents, alors qu'elle doit être démontrée par le calcul lorsque les événements se rapportent au même lancer.

#### Événements dépendants

Tous les événements aléatoires ne sont pas indépendants.

Ainsi, « obtenir un nombre pair » et « obtenir un nombre $\geqslant 4$ » lors du même lancer de dé ne sont pas indépendants :

$$P(\text{pair et } \geqslant 4) \neq P(\text{pair})\ P(\geqslant 4) \qquad \left(\text{car } \frac{2}{6} \neq \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right) \tag{1.6}$$

Considérons ensuite un paquet de 52 cartes à jouer. La probabilité de tirer une carte rouge est $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$, et de même pour celle de tirer une carte noire. Si on a déjà tiré une carte rouge, la probabilité que la deuxième carte soit rouge n'est plus $\frac{1}{2}$ mais $\frac{25}{51}$ ; et celle que la deuxième carte soit noire est $\frac{26}{51}$. Les événements « premier tirage d'une carte » et « deuxième tirage d'une carte » ne sont pas indépendants, car les probabilités du deuxième tirage dépendent du résultat du premier.

Le temps qu'il fera à midi tel jour dans un an peut être considéré comme un événement aléatoire, de même que le temps qu'il fera à treize heures le même jour. Supposons que le temps ce jour-là de l'année soit ensoleillé dans 30 % des cas, nuageux dans 60 % des cas, et pluvieux dans 10 % des cas. La probabilité qu'il fasse nuageux à treize heures sera plus élevée que 60 % s'il faisait déjà nuageux à midi. Les deux événements ne sont pas indépendants.

Mais plus l'intervalle de temps entre les deux observations est grand, et plus les événements seront indépendants. Il s'agit là d'une règle générale, valable pour une grande variété de phénomènes physiques : plus deux événements sont éloignés dans le temps ou l'espace, et plus ils ont de chances d'être indépendants.

### 1.2.4 Exemples de calculs de probabilités

Nous illustrons ici au moyen d'exemples comment calculer les probabilités d'événements plus complexes.

#### Lancer de deux dés

Lorsqu'on lance deux dés, il y a 36 résultats possibles : (1, 1), (1, 2), ..., (6, 6). Le premier chiffre dans la parenthèse provient du premier dé, et le deuxième du second dé. Chacun a une probabilité de $\frac{1}{36}$.

Supposons maintenant qu'on ne s'intéresse qu'à la somme des points des dés. Elle est donnée pour chaque paire dans le tableau 1.1.

TAB. 1.1 – Somme des points pour chaque paire

| Dé 1 / Dé 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

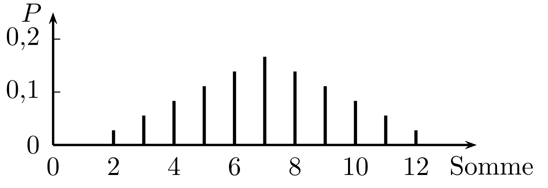
Cette somme peut aller de 2 à 12. Mais toutes les valeurs n'ont pas la même probabilité. Pour obtenir un 12, il faut un 6 sur chaque dé, alors que 11 peut provenir de 6 pour le premier et 5 pour le deuxième, ou de 5 pour le premier et 6 pour le deuxième. Quant à 7, il peut résulter de six paires différentes : (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) et (6, 1).

Il suffit de compter les paires donnant chaque total et de diviser ces nombres par 36 pour obtenir les probabilités :

| Somme | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

La probabilité augmente, atteint un maximum et puis redescend. Ces chiffres sont représentés dans la figure 1.1 au moyen de bâtonnets.

FIG. 1.1 – Probabilités pour la somme des points de deux dés




Pour déterminer les probabilités d'événements plus complexes, on essaie donc de ramener ceux-ci à des événements plus simples et indépendants. Le calcul des probabilités se réduit alors au *comptage* des façons d'obtenir chaque résultat.

### Lancers de pièces

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie, les probabilités d'obtenir pile (P) et face (F) sont chacune égales à 1/2.

Si on la lance deux fois, on peut avoir quatre résultats : FF, FP, PF ou PP. Chacun a une probabilité de $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ puisque les lancers sont des événements indépendants.

Plus généralement, $n$ lancers donnent lieu à $2^n$ successions possibles de piles et de faces, chacune ayant une probabilité de $1/2^n$.

Supposons qu'on s'intéresse seulement aux nombres totaux de piles et de faces, et pas au détail de la succession des résultats. On cherche donc la probabilité que $n$ lancers donnent $r$ piles et $n - r$ faces.

Lorsque $n$ est petit, il suffit de parcourir les $2^n$ cas possibles et de compter les cas favorables. Le résultat est représenté dans les tableaux suivants pour respectivement $n = 2$ et $n = 3$ :

| Nombre de piles | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| Cas favorables | FF | FP, PF | PP |
| Probabilité | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

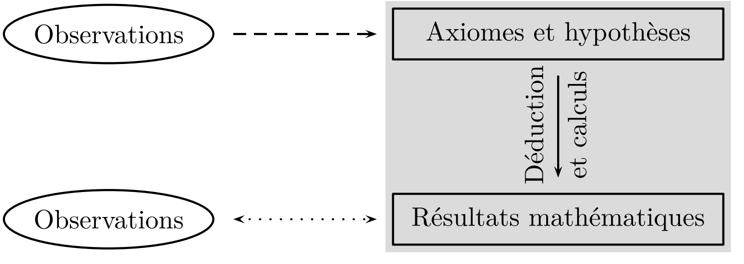
| Nombre de piles | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Cas favorables | FFF | FFP, FPF, PFF | FPP, PFP, PPF | PPP |
| Probabilité | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

**Notre approche**

Dans les pages qui précèdent, nous avons mêlé des affirmations (non prouvées) concernant la réalité observable et des déductions mathématiques. Peut-être serait-il utile de clarifier notre approche.

Comme l'illustre la figure 1.2, le mathématicien s'inspire largement de la réalité observable, ou d'une version idéalisée de celle-ci, pour formuler axiomes et hypothèses.

Fig. 1.2 – Réalité observable et théorie mathématique




La théorie mathématique est la partie du schéma en gris. Elle peut être incorrecte suite à une erreur de raisonnement ou de calcul, mais elle ne peut pas être invalidée par des observations.

En revanche, la comparaison des résultats mathématiques avec les observations peut montrer que la théorie mathématique ne décrit pas (exactement) la réalité et est donc moins utile qu'on ne le pensait.

En d'autres termes, la « garantie » d'un texte mathématique ne porte que sur le lien entre axiomes et hypothèses d'une part, et résultats mathématiques d'autre part.

Alors, pourquoi ne pas nous cantonner à la partie grise du schéma, et parler uniquement de lois de probabilité abstraites ?

Parce que la réalité nous pose des questions et nous souffle des réponses. Et parce que la plupart des gens comprennent mieux et sont plus motivés pour apprendre lorsqu'on fait référence à des problèmes concrets.

## 1.3 Analyse combinatoire

Déterminer les probabilités comme nous l'avons fait jusqu'à présent, en écrivant explicitement les cas possibles et les cas favorables, n'est plus praticable quand les cas deviennent très nombreux.

Nous utiliserons donc une méthode plus puissante appelée « analyse combinatoire ». Elle nous donnera non seulement les valeurs numériques recherchées, mais également des formules manipulables par l'algèbre.

Nous supposerons ici que les objets tirés au hasard dans un certain ensemble sont les lettres a, b, c, …