« Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre. » Voilà donc le premier maître-mot ! S'il est en effet une devise qui permet de caractériser clairement l'exercice des mathématiques et de l'astronomie jusqu'à la fin du XVIIe siècle, c'est bien cette inscription de l'Académie platonicienne : le mot de passe indispensable pour pénétrer dans l'architecture des esprits clairvoyants ; la formule magique qui accueille tout prétendant en la matière et le met en garde contre toute tentation relative à l'examen de la nature. Seule la géométrie présente les formes parfaites dignes de donner du monde l'intelligibilité adéquate ; dignité conférée par le caractère idéal de ces figures dont les tracés empiriques imprimés sur les livres ne sont que les pâles imitations. L'enjeu n'est autre que celui de *sauver les phénomènes*, ou plus exactement de saisir par l'esprit l'idéal dont ils procèdent tous sans exception, pourvus qu'ils soient situés au-delà de l'orbe de la Lune, en deçà duquel, selon Aristote, tout n'est que changement et corruption.

Corruption ou pas, la terre des hommes présente néanmoins des régularités qui n'échappent pas à l'esprit d'Aristote lui-même et de ses disciples. Étudier les causes de ces changements a donc du sens et il n'est pas vain de spéculer sur l'origine et le devenir des êtres qui ne font que passer, aussi futiles soient-ils. Pour ce faire, la *Physique* tient lieu d'explication rationnelle. Pourtant, la géométrie dans cette physique n'a aucune importance dans la mesure où elle ne saurait s'appliquer aux choses de ce monde. Ce serait marier les contraires dans une union illégitime que tout oppose, à moins de forcer la rencontre et de tenter une réconciliation irrecevable et inconcevable tant que le monde, centré sur la Terre, assigne à celle-ci une place privilégiée qui la distingue par nature du ciel tout entier. Mais comment cela pourrait-il se faire ? C'est un chanoine du nom de Copernic qui opère le déplacement tant attendu, le décentrement qui fait tout basculer et ouvre contre toute attente des horizons jusqu'alors demeurés invisibles à l'esprit. Désormais le ciel et la Terre sont unis en un seul univers vraisemblablement perméable à la géométrie qui s'invite jusque dans l'étude du mouvement local. S'agissant plus précisément de la chute des graves, l'impétrant répond au nom de Galilée, véritable maître de cérémonie qui scelle de manière définitive l'union de la géométrie et du mouvement : « La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers. (…) Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques. »[iv]

Après un tel bouleversement, la géométrie devient plus que jamais le sésame pour accéder à la république des philosophes, car « la méthode de ne point errer est recherchée de tout le monde. Les logiciens font profession d'y conduire, les géomètres seuls y arrivent, et, hors de leur science et de ce qui l'imite, il n'y a point de véritables démonstrations. Et tout l'art en est renfermé dans les seuls préceptes que nous avons dits : ils suffisent seuls, ils peuvent seuls ; toutes les autres règles sont inutiles ou nuisibles.»[v] Le raisonnement du géomètre est comme un guide pour la raison tout entière. Sa clarté autant que sa précision prodiguent à la pensée la clairvoyance sans laquelle bien des connaissances certaines resteraient cachées derrières des savoirs populaires et ancestraux. Ce n'est pas l'ancienneté d'une connaissance qui fait son exactitude, c'est qu'elle puisse être mise hors d'atteinte du doute, et « ces longues chaisnes de raisons toutes simples et faciles, dont les Geometres ont coustume de se servir, pour parvenir a leurs plus difficiles demonstrations, m'avoient donné occasion de m'imaginer, que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connoissance des hommes s'entresuivent en mesme façon, et que pourvû seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraye qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées ausquelles enfin on ne parvienne, ny de si cachées qu'on ne découvre. »[vi] Au reste, si par mégarde l'abus d'une rhétorique trop imprudente égare un physicien vers quelque paralogisme tel Marin Cureau de La Chambre tentant de rendre compte des actions de la lumière, c'est un géomètre de premier plan qui lui vient en aide pour aboutir, en l'occurrence, sur le principe qui fait encore autorité aujourd'hui : « Souffrez que je joigne un peu de ma géométrie à votre physique »[vii] lui propose Pierre de Fermat. Le caractère géométrique d'un raisonnement est par excellence le gage d'une apodicticité si précieuse qu'on ne saurait s'en priver. « La géométrie s'enorgueillit de parvenir à de si grands résultats, en empruntant si peu au dehors. »[viii] Euclide est à ce moment-là, d'une certaine manière, le premier et le père des physiciens.

Pratiquer la physique de la sorte reste cependant d'un usage restreint, car dans cette science tout n'est que rapport de longueurs et aucune d'entre elles ne représente au premier abord autre chose que ce qu'elle est, c'est-à-dire une portion de l'espace. Nulle date, nulle durée, nul temps, à moins de faire abstraction et de représenter ce dernier à l'aide d'autres figures géométriques. Dans tous les cas, la grandeur représentée n'a accès à la quantification que par l'espace, elle est à la mesure d'une ligne ou d'un segment qui demeurent fondamentalement des objets de l'espace, identifiés à l'espace. En sorte que la distinction entre une grandeur véritablement spatiale comme une longueur et une grandeur non-spatiale comme une durée reste confuse. L'exercice est propice à l'erreur. Bien que les rapports donnent lieu à des expressions algébriques, celles-ci ne sauraient faire apparaître quelque coefficient que ce soit, car on ne compare jamais que des longueurs entre elles, des rayons entre eux, des aires entre elles et à toutes fins utiles des durées ou des actions. La proportion n'existe que dans la comparaison et non dans une forme synthétique capable d'exprimer à elle seule un rapport universel entre des quantités variables. À plus forte raison, on ne peut y trouver ni dimension, ni unité. Une vitesse, pour ne citer que cet exemple, peut recevoir une quantification géométrique mais ne saurait accepter de définition géométrique. Tout au plus est-elle l'expression d'un mouvement rapide ou d'un mouvement lent, qu'il soit naturel ou même violent ; la définition que nous lui donnons aujourd'hui ne trouverait aucun sens à l'ère du tout géométrique.

Les principes mathématiques de la philosophie naturelle de Newton publiés en 1687 marquent à la fois le sommet et les limites du raisonnement géométrique. En récapitulant les travaux des géants qui le précèdent, Newton établit sur la base de raisonnements purement géométriques la loi de la gravitation exprimant comme on le prévoyait, la raison inverse entre la force et le carré des distances. Or, il faut pour parvenir à ce résultat considérer des limites, autrement dit des variations aussi petites qu'on le souhaite, mais surtout contraires aux usages de la géométrie. Ce faisant, cette nouveauté inaugure le calcul infinitésimal et augure plus encore des succès qui ne seront pas démentis au cours des siècles qui suivent.

Enfin, contrairement à Kepler, Descartes ou Huygens, Newton ouvre la voie d'une physique qui n'a de valeur que dans la mesure où elle suffit à rendre compte des phénomènes, tirant sa légitimité de la méthode dont Francis Bacon avait donné les principales lignes et renonçant définitivement à l'intrusion de toute forme d'hypothèses, comme en témoigne le fameux scholie général de l'œuvre : *hypotheses non fingo.* Cette physique nouvelle porte un nom : la physique mathématique. Sa capacité spéculative s'en trouve démultipliée et annonce d'ores et déjà sa redoutable capacité prédictive. L'univers désormais désenchanté tourne à la manière d'une mécanique d'horloger où l'ordre établi éblouit même le poète : « Le firmament se meut ; les astres font leur cours, Le Soleil nous luit tous les jours. Tous les jours sa clarté succède à l'ombre noire Sans que nous en puissions autre chose inférer Que la nécessité de luire et d'éclairer, D'amener les saisons, de mûrir les semences, De verser sur les corps certaines influences. Du reste en quoi répond au sort toujours divers Ce train toujours égal dont marche l'univers. » [ix]

[iv] GALILÉE, *Il saggiatore*, 1623.
[v] Blaise PASCAL, *De l'esprit géométrique*, 1655.
[vi] René DESCARTES, *Discours de la méthode*, 1637.
[vii] Lettre de Pierre de FERMAT à Marin CUREAU DE LA CHAMBRE, août 1657.
[viii] Isaac NEWTON, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle.* Citation donnée en exemple par Emmanuel Kant dans les *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature.*
[ix] Jean de LA FONTAINE, *Fables, L'astrologue qui se laisse tomber dans un puits.*

- L'ASTRONOMIE -

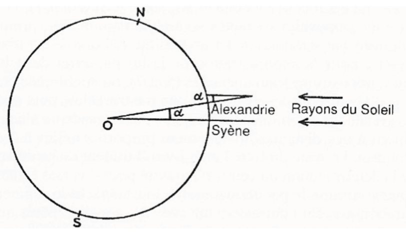
« Bien qu'il soit généralement admis que le développement de la cosmologie nouvelle, qui remplaça le monde géocentrique des Grecs et le monde anthropocentrique du Moyen Âge par l'Univers décentré de l'astronomie moderne, a joué un rôle de toute première importance dans ce processus, certains historiens, s'intéressant principalement aux implications sociales des processus spirituels, ont insisté sur la prétendue conversion de l'esprit humain de la *theoria* à la *praxis*, de la *science contemplative* à la *science active* qui transforma l'homme de spectateur de la nature en son maître et possesseur. »

Alexandre KOYRÉ, *Du monde clos à l'Univers infini*, Avant-propos, Gallimard, 1973.

ÉRATOSTHÈNE MESURE LA TERRE

« Les géographes grecs avaient depuis longtemps divisé le monde en zones ; mais la carte du monde établie par Ératosthène est la première carte détaillée qui s'appuie sur un système de méridiens et de parallèles correspondant aux longitudes et aux latitudes. On lui est aussi redevable d'une approximation serrée des dimensions de la Terre, fondée sur les observations effectuées à Syène et à Alexandrie. À Syène, un gnomon dressé verticalement ne projetait aucune ombre à midi, le jour du solstice d'été, alors qu'à Alexandrie, au même moment, un gnomon projetait une ombre de 7 1/5° [7,2°]. Par un raisonnement géométrique simple, on trouve le même chiffre pour l'angle sous-tendu par l'arc Syène-Alexandrie à partir du centre de la Terre (voir figure). Ératosthène supposait que Syène et Alexandrie étaient sur le même méridien, et il considérait que la distance entre les deux points était de 5 000 stades. (…) On a généralement supposé qu'il utilisait un stade de 157,5 mètres (…) mais il y a au moins deux autres possibilités distinctes – des stades qui valent respectivement un huitième et un dixième du mille romain, soit approximativement 186 mètres et 148,8 mètres. »

Geoffrey E. R. LLOYD, *Une histoire de la science grecque*, Seuil, 1990.



1. Citer une observation astronomique permettant de préjuger de la forme de la Terre.
2. Quelle est la condition géométrique nécessaire à l'égalité des deux angles α notés sur le schéma ? Quelle hypothèse doit-on faire concernant les directions de propagation des rayons issus du Soleil ? Dans quel cas est-elle vérifiée ?
3. On note R_T le rayon de la Terre et D la distance séparant Syène et Alexandrie. Exprimer R_T en fonction de D et α.
4. Calculer la valeur de R_T en mètres en prenant 157,5 m pour un stade.
5. La valeur actuellement retenue est $R_T = 6371$ km. Déduire les erreurs absolue et relative commises sur la mesure d'Ératosthène. Quelles peuvent être les sources d'erreurs ?

ARISTARQUE DE SAMOS

« Le premier savant à avoir tenté de déterminer effectivement les dimensions et les distances de corps célestes, bien que les théorèmes géométriques mis en œuvre remontent à Euclide, est un quasi-contemporain d'Ératosthène, son aîné cependant, Aristarque de Samos, né vers 310 avant notre ère. S'il est surtout connu comme le premier "héliocentriste", le seul traité de lui qui nous soit parvenu est son *Sur les dimensions et sur les distances du soleil et de la lune.* »

Jean-Pierre VERDET, *Une histoire de l'astronomie*, Seuil, 1990.

Le traité d'Aristarque s'ouvre sur les six hypothèses suivantes :

I. La lune reçoit sa lumière du Soleil.
II. La terre peut être considérée comme un point, et comme le centre de l'orbite de la lune.
III. Lorsque la lune nous paraît *dikhotome* (coupée en deux parties égales), elle offre à nos regards son grand cercle, qui détermine la partie éclairée et la partie obscure de cet astre.
IV. Lorsque la lune nous paraît dikhotome, sa distance du soleil est moindre du quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart [voir question 4.].
V. La largeur de l'ombre [de la Terre] est de deux lunes.
VI. L'arc soutendu dans le ciel par la lune est la quinzième partie d'un signe.

Traduction de Fortia d'Urban, publié en 1823 chez Firmin Didot, réédition Blanchard.

On note S le Soleil, T la Terre et L la Lune, R_T le rayon de la Terre et R_L celui de la Lune.

1. D'après l'hypothèse II, on peut déduire que la distance Terre-Soleil est très grande devant le rayon de la Terre. Quelle approximation peut-on en déduire concernant les directions de propagation des rayons issus du Soleil qui arrivent jusqu'à la Terre ?
2. D'après l'hypothèse V, exprimer R_L en fonction de R_T et justifier à l'aide d'un schéma clair.
3. D'après l'hypothèse III, représenter le triangle S, T, L dans le cas d'une Lune dikhotome.
4. D'après l'hypothèse IV, l'angle noté $\alpha = \widehat{STL}$ vaut $90° - \frac{90°}{30}$ (« quart de la circonférence » diminué de « la trentième partie de ce quart »). Calculer α et exprimer TS en fonction de TL et α.
5. D'après l'hypothèse VI, donner en radians la valeur du diamètre apparent noté β (« l'arc soutendu ») de la Lune perçue depuis la Terre sachant qu'un « signe » est l'angle d'un signe du zodiaque et que les douze signes du zodiaque sont répartis sur un cercle. On donnera aussi l'expression littérale de β.
6. De tout ce qui précède, exprimer :

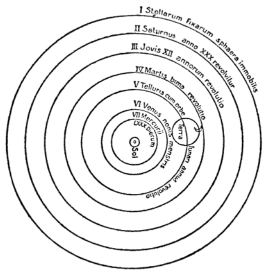
a. TL en fonction de R_T et β. Calculer sa valeur si R_T = 6370 km et comparer avec la valeur moyenne actuelle : $TL = 384 \cdot 10^3$ km.
b. TS en fonction de R_T, α et β. Calculer sa valeur si R_T = 6370 km et comparer avec la valeur moyenne actuelle : $TS = 150 \cdot 10^6$ km.

7. Donner des sources d'erreurs possibles permettant d'expliquer les écarts constatés.

LE MONDE DE COPERNIC

> « Nous devons nous rendre à l’évidence : le monde de Copernic est fini. De plus il paraît psychologiquement tout à fait normal que l’homme qui fit le premier pas, celui d’arrêter le mouvement de la sphère des fixes, ait hésité à faire le second, celui de la dissoudre dans l’espace sans limite. Ne soyons pas trop exigeants : il suffit au mérite de Copernic d’avoir donné le mouvement à la Terre et d’avoir élargi le monde jusqu’à le rendre *immensum* ; on ne peut raisonnablement lui demander davantage. Une grande importance a été attribuée à l’élargissement du monde copernicien comparé à celui du Moyen Âge – son diamètre est au moins 2000 fois plus grand. (…) On admettait communément que son rayon était approximativement égal à 20 000 rayons terrestres, c’est-à-dire plus de 200 000 000 de kilomètres. »
>
> Alexandre KOYRÉ, *Du monde clos à l’univers infini,* Gallimard, 1973.

D’après les systèmes d’Aristote ou de Copernic, toutes les étoiles sont réparties sur une sphère appelée « sphère des fixes » dont le centre est occupé par la Terre selon Aristote et par le Soleil selon Copernic. On définit la parallaxe annuelle d’une étoile située sur la sphère des fixes comme étant l’angle sous lequel on aperçoit la distance Terre-Soleil depuis cette étoile. On note $K = D_C/D_{MA}$ où D_{MA} est le diamètre de l’univers au Moyen Âge et D_C la valeur minimale du diamètre de l’univers pour Copernic. On prend pour la distance Terre-Soleil $TS = 7{,}5 \cdot 10^6$ km.



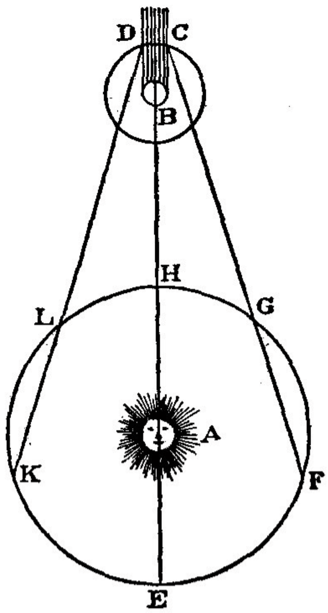
1. Représenter la sphère des fixes par un cercle $\mathcal{C}$ de centre S et de rayon 5 cm environ. Selon le système de Copernic S est l’emplacement du Soleil. Ajouter un segment horizontal TT’ d’une longueur de 2 cm et dont S est le milieu. Il représente les emplacements extrêmes de la Terre dans son mouvement autour du Soleil. T sera placé à gauche et T’ à droite.
2. Tracer une droite D orthogonale à TT’ passant par T et coupant $\mathcal{C}$ en A puis une droite D’ parallèle à D passant par T’ coupant $\mathcal{C}$ en B. Ces deux droites représentent la direction constante par rapport à laquelle on mesure la parallaxe annuelle d’une étoile.
3. Ajouter un point E sur le cercle $\mathcal{C}$ entre A et B représentant l’étoile dont on souhaite mesurer la parallaxe annuelle. Noter α l’angle $\widehat{ATE}$ et β l’angle $\widehat{BT'E}$.
4. Exprimer $\widehat{TET'}$ en fonction de α et β.
5. Représenter la parallaxe annuelle p de l’étoile E sur ce même schéma et déduire son expression en fonction de α et β.
6. L’incertitude sur les mesures de α et β vaut $\theta = 3{,}0 \cdot 10^{-4}$ rad, le pouvoir séparateur de l’œil. Encadrer les valeurs de α et β puis celle de p.
7. Déduire la valeur théorique de p si $\alpha \ll \theta$ et $\beta \ll \theta$.
8. Exprimer p en fonction de TS et D_C.
9. Calculer la valeur minimale de D_C si l’étoile E ne présente pas de parallaxe à l’œil nu.
10. Calculer la valeur de K puis la comparer avec celle qui est donnée dans le texte.
11. En réalité la valeur $TS = 150 \cdot 10^6$ km. Quelle était dans ce cas la valeur de K ? Commenter.

LES OBSERVATIONS DE RÖMER

« Il y a longtemps que les Philosophes sont en peine de décider par quelque expérience, si l'action de la lumière se porte dans un instant à quelque distance que ce soit, ou si elle demande du temps. Mr Römer de l'Académie Royale des Sciences s'est avisé d'un moyen tiré des observations du premier satellite de Jupiter, par lequel il démontre que pour la distance d'environ 3000 lieuës, tel qu'est à peu près la grandeur du diamètre de la terre, la lumière n'a pas besoin d'une seconde de temps. »

Journal des Sçavans, 7 décembre 1676, *Démonstration touchant le mouvement de la lumière trouvé par M. Römer de l'Académie Royale des Sciences.*

Grâce aux satellites découverts par Galilée, Olaus Römer peut en effet donner la première mesure de la vitesse de la lumière. Selon le schéma ci-contre tiré du *Journal des Sçavants*, le Soleil est en A et Jupiter en B. Le satellite Io effectue un mouvement de révolution le long d'un cercle où C et D sont des positions remarquables. La Terre est animée d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse v le long d'un cercle appelé *écliptique* sur lequel sont repérés les points de passage E, F, G H, L et K. Elle passe par F lorsqu'elle se déplace de E vers H. On appelle T la période de révolution de Io autour de Jupiter. Elle correspond donc à l'intervalle de temps compris entre deux passages consécutifs de Io par un point « fixe » de son orbite. On supposera que pendant une mesure de durée effectuée par Römer, le déplacement de Jupiter sur son orbite est négligeable. On note c la célérité de la lumière dans le vide.



1. On appelle Δt la durée séparant quarante éclipses consécutives de Io entrant dans le cône d'ombre de Jupiter au point fixe C, une première fois lorsque la Terre est en F, une dernière fois lorsque la Terre est en G.

a. Quelle serait la valeur de Δt si la Terre était immobile en F ?

b. Exprimer la durée τ du parcours de la lumière le long de FG.

c. Donner la vraie expression de Δt en fonction de T et τ, puis en fonction de T, FG et c sachant que la Terre s'est déplacée selon un mouvement quasi-rectiligne de F vers G pendant cette durée.

2. On appelle $\Delta t'$ la durée séparant quarante éclipses consécutives de Io sortant du cône d'ombre de Jupiter au point fixe D, une première fois lorsque la Terre est en L, une dernière fois lorsque la Terre est en K.

a. Quelle serait la valeur de $\Delta t'$ si la Terre était immobile en L ?

b. Exprimer la durée τ' du parcours de la lumière le long de LK.

c. Donner la vraie expression de $\Delta t'$ en fonction de T et τ', puis en fonction de T, LK et c sachant que la Terre s'est déplacée selon un mouvement rectiligne de L vers K pendant cette durée.

3. Des deux relations précédentes, déduire l'expression de c en fonction de FG, LK, Δt et $\Delta t'$.

4. Exprimer FG et LK en fonction de v.

5. Montrer que $c = \alpha \frac{\Delta t' + \Delta t}{\Delta t' - \Delta t}$ où l'on exprimera α en fonction des données de l'énoncé.

6. La distance Terre-Soleil étant estimée à $AE = 150 \cdot 10^6$ km. Calculer v si on prend pour la période de révolution de la Terre T'= 365,25 jours.

7. Calculer la célérité de la lumière si $\Delta t = 34$ j 21 h 9 min et $\Delta t' = 34$ j 21 h 19 min. On prendra 1j = 24h.