Chapitre 1
Éléments de description cinématique et cinétique du solide

La lecture des *Éléments* d'Euclide pousse Pierre **Varignon** vers l'étude de la géométrie et de la mécanique. Comprenant tout de suite l'importance du calcul différentiel établi par **Leibniz** et **Newton** en cette fin de XVII^{e} siècle, il démontre aussitôt plusieurs théorèmes de mécanique et il introduit la notion de vitesse à chaque instant que de nos jours nous appelons vitesse instantanée. Il se bat alors pour faire reconnaître en France l'intérêt du calcul différentiel. C'est sans compter avec la pugnacité de Michel **Rolle**. Ce mathématicien auvergnat, dont le nom est pourtant attaché à un théorème sur la dérivation, reprocha à cette nouvelle théorie de ne reposer sur rien de tangible. À l'automne 1706, Rolle reconnut son erreur et exprima à Varignon sa contrition pour cette mauvaise querelle.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- La définition du solide et le nombre de degrés de liberté qu'il possède
- La définition du centre de masse d'un solide
- La définition du moment d'inertie d'un solide
- La relation de Varignon
- La forme générale de la vitesse d'un solide et son expression dans les cas particulier de translation pure ou de rotation pure autour d'un axe fixe
- La formule de dérivation dans un trièdre mobile
- La définition du référentiel barycentrique
- La définition de la vitesse de glissement, la condition de roulement sans glissement
- Les définitions des éléments cinétiques d'un solide que sont la résultante cinétique, le moment cinétique et l'énergie cinétique
- Connaître la forme du moment cinétique et de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, ou gardant une direction fixe dans le référentiel d'étude galiléen
- Connaître les deux théorèmes de Koenig

Ce qu'il faut savoir faire

- Savoir, le cas échéant, décomposer le mouvement d'un solide en termes de translation et de rotation
- Savoir recenser le nombre de paramètres indépendants intervenant dans l'étude cinématique
- Savoir choisir une base dans laquelle expliciter simplement de mouvement
- Savoir mettre en œuvre les formules de changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations
- Savoir mettre en œuvre la condition de roulement sans glissement entre deux points d'un solide
- Savoir analyser le mouvement instantané d'un solide
- Savoir mettre en œuvre les théorèmes de Koenig pour obtenir les éléments cinétiques du système

■■ Résumé de cours

■ Le modèle du solide indéformable

❑ Définition

On appelle solide indéformable ou plus simplement solide, un système invariable de points matériels : les distances mutuelles entre les différents points du solide sont constantes.

→ Le solide possède **6 degrés de liberté**.

Remarque

La notion de solide indéformable et donc parfaitement rigide n'est qu'un modèle idéal, la réalité naturelle et technologique étant plus complexe…

■ Distribution des vitesses d'un solide

❑ Relation de Varignon

Soient A et M deux points d'un même solide S. Leur vitesse est liée par la relation de Varigon $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}}$ où $\vec{\omega}(t)$ est le vecteur rotation instantanée du solide que nous noterons plus simplement $\vec{\omega}$.

❑ Mouvement instantané le plus général d'un solide

On appelle axe instantané de viration ou axe central du torseur cinématique (dit encore axe de vissage du solide) l'axe Δ parallèle à $\vec{\omega}(t)$. En tout point de cet axe, la vitesse est colinéaire à $\vec{\omega}(t)$. De plus, l'axe Δ est le lieu des points de vitesses minimum du solide.

Soit O un point du solide S appartenant à Δ et M un point quelconque de S, la relation de Varignon entre O et M donne : $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_O} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V_\parallel} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$.

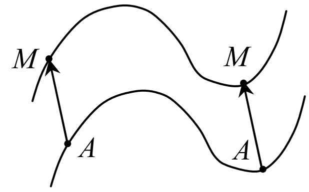
→ Le terme $\overrightarrow{V_\parallel}$, colinéaire à Δ, est appelé vitesse de glissement le long de Δ. $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ est un terme de rotation autour de Δ à la vitesse angulaire instantanée ω.

⇨ **Méthodes 1.2. Comment caractériser le mouvement de rotation d'un point autour d'un axe fixe ? Quelle application au solide ? et 1.4. Comment analyser le mouvement instantané d'un solide roulant sans glisser ?**

→ Le mouvement instantané le plus général d'un solide est un mouvement hélicoïdal, combinaison d'une translation le long de Δ et d'une rotation autour de Δ.

❑ Mouvement de translation

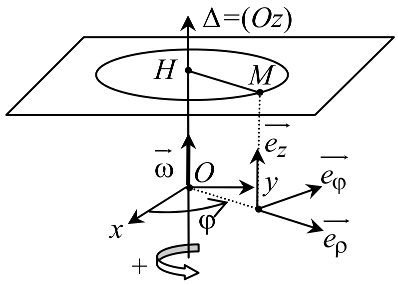
Un solide S est en translation dans le référentiel (R) si pour tout point A et M appartenant à S, on a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{cte}$. Attention il ne s'agit pas ici de translation rectiligne mais curviligne (translation elliptique, circulaire ou suivant une courbe quelconque).



Dans ce cas, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AM}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A}, \quad \forall (A, M) \in S$. Tous les points de S ont même vitesse et même accélération. Par comparaison avec la relation de Varignon, on a : $\boxed{\vec{\omega}(t) = \vec{0}}$.

❑ Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Un solide S est en rotation autour d'un axe Δ fixe passant par une origine O fixe d'un référentiel (R), lorsque tout point M de S décrit un mouvement circulaire de rayon HM dans un plan perpendiculaire à Δ, où H est le projeté orthogonal de M sur Δ. En adoptant le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) qui est le trièdre adapté aux symétries du problème, la vitesse du point M est : $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$ où $\boxed{\vec{\omega} = \omega\,\overrightarrow{e_z} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_z}}$ est orienté suivant à l'aide de la **règle du tire bouchon**.



■ Changement de référentiel

Dans tout ce qui suit, (R) rapporté à $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est un référentiel absolu et (R') rapporté à $(O', \overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_{z'}})$ est un référentiel relatif en mouvement dans (R). On note $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de (R') par rapport à (R).

❑ Dérivation dans un trièdre mobile

Soit $\vec{K} = K_{x'}\,\overrightarrow{e_{x'}} + K_{y'}\,\overrightarrow{e_{y'}} + K_{z'}\,\overrightarrow{e_{z'}}$ un vecteur exprimé dans (R'), les dérivées temporelles dans (R) et (R') sont liées par : $\boxed{\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{K}}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment dériver un vecteur dans un trièdre mobile ?**

❑ Composition des vitesses de rotation

Soient A et B deux points d'un même solide de référence $S2$ en rotation par rapport à deux autres solides $S0$ et $S1$, avec les vecteurs rotations instantanées respectifs $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$ et $\overrightarrow{\omega_{2/1}}$. On associe à chacun de ces solides les référentiels (R_0), (R_1) et (R_2) On a : $\boxed{\overrightarrow{\omega_{2/1}} = \overrightarrow{\omega_{2/0}} + \overrightarrow{\omega_{0/1}}}$.

❑ Composition des vitesses

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').

→ Sa **vitesse absolue** comme sa vitesse par rapport à (R) s'écrit : $\overrightarrow{V_a}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R$.

→ Sa **vitesse relative** comme sa vitesse par rapport à (R') s'écrit : $\overrightarrow{V_r}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$.

→ Sa **vitesse d'entraînement** définie comme la vitesse d'un point P fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M s'écrit : $\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(O') + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$.

On a alors : $\boxed{\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}(M)}$.

❑ Composition des accélérations

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').

→ Son **accélération absolue** par rapport à (R) s'écrit : $\overrightarrow{a_a}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}}{\mathrm{d}t}\right|_R$.

→ Son **accélération relative** par rapport à (R') s'écrit : $\overrightarrow{a_r}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{R'} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_r}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$.

→ Son **accélération d'entraînement** qui est celle d'un point P fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M s'écrit :

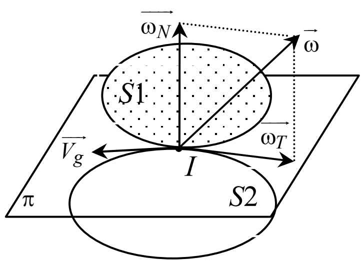
$$\overrightarrow{a_e}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R = \overrightarrow{a_a}(P) = \overrightarrow{a_a}(O') + \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P}\right).$$

→ Son **accélération de Coriolis** s'écrit : $\overrightarrow{a_c}(M) = 2\,\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$.

On a alors : $\boxed{\overrightarrow{a_a}(M) = \overrightarrow{a_r}(M) + \overrightarrow{a_e}(M) + \overrightarrow{a_c}(M)}$.

■ Cinématique du contact entre deux solides

On s'intéresse ici au contact ponctuel, dans un référentiel (R), entre deux solides $S1$ et $S2$ indéformables, en un point de contact géométrique à l'instant t noté $I(t)$ ou plus simplement I. La réalité physique est bien entendu plus complexe : les solides sont déformables et le contact s'effectue sur une surface. Si les surfaces en contact sont assez régulières, on peut définir un plan commun tangent aux deux solides en contact (noté (π) sur le schéma ci-contre).



❑ Vitesse de glissement

I est le point de l'espace où le contact entre les solides se produit à l'instant t, $I_1 = I_{1\in S1}$ le point appartenant à $S1$ coïncidant avec I à l'instant t (mais pas à un instant antérieur ou postérieur) et $I_2 = I_{2\in S2}$ le point appartenant à $S2$ coïncidant avec I à l'instant t. On définit la vitesse de glissement de $S1$ sur $S2$, notée $\overrightarrow{V_g}$ par : $\boxed{\overrightarrow{V_g} = \overrightarrow{V}_{S1/S2} = \overrightarrow{V}_{I_1/S2} = \overrightarrow{V}_{I_1\in S1/R} - \overrightarrow{V}_{I_2\in S2/R}}$. Les solides étant indéformables, on a : $\boxed{\overrightarrow{V_g} \in (\pi)}$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment exprimer la vitesse du centre de masse d'un solide roulant sans glisser ?**

❑ Glissement, pivotement et roulement, roulement sans glissement

La vitesse de $I_{1\in S1}$ par rapport à $S2$ s'écrit : $\overrightarrow{V}_{M/S2} = \overrightarrow{V_g} + \overrightarrow{\omega_N} \wedge \overrightarrow{I_1M} + \overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{I_1M}$. Il s'agit donc de la somme de trois termes : la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_g}$, la vitesse de pivotement de $S1$ sur $S2$ $\overrightarrow{\omega_N} \wedge \overrightarrow{I_1M}$ et la vitesse de roulement de $S1$ sur $S2$ $\overrightarrow{\omega_T} \wedge \overrightarrow{I_1M}$.

On dit qu'il y a roulement sans glissement ni pivotement lorsque les deux premiers termes sont nuls. Dans le cadre du programme on néglige toujours le pivotement pour ne retenir que la condition de roulement sans glissement : $\boxed{\overrightarrow{V_g} = \vec{0}}$ (condition notée en abrégé CNG ou CRSG).

⇨ **Méthodes 1.3. Comment exprimer la vitesse du centre de masse d'un solide roulant sans glisser ? et 1.4. Comment analyser le mouvement instantané d'un solide roulant sans glisser ?**

■ Distribution de masse et centre de masse d'un solide

❑ Centre de masse d'un solide

Soit A un point courant du système Σ, on décompose ici la masse M du système continu Σ en éléments de masse d$m(A)$ autour du point A, de sorte que : $M = \int_{\Sigma} \mathrm{d}m$.

Attention, ici (et dans la suite) le signe $\int_{\Sigma}$ traduit, de façon condensée, la sommation sur l'ensemble du système dans les trois cas suivants :

→ $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$ et $\int_{\Sigma} = \iiint_{\vartheta}$ pour une **distribution volumique** de volume ϑ,

→ $\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$ et $\int_{\Sigma} = \iint_{S}$ pour une **distribution surfacique** de surface S,

→ $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$ et $\int_{\Sigma} = \int_{L}$ pour une **distribution linéique** de longueur L.

Dans ces expressions ρ, σ et λ désignent respectivement la densité volumique, surfacique et linéique de masse. La même notation sera utilisée dans le cas particulier du solide.

Remarque

Notons que, dans le cas général, ρ, σ et λ dépendent de la position du point courant A de la distribution de masse du système. Ce n'est que lorsque le système est homogène qu'ils sont constants. On note l'analogie avec les distributions de charge en électrostatique.

→ On définit le centre de masse d'une distribution volumique par : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\int_{\Sigma} \overrightarrow{OA}\,\mathrm{d}m(A)}$.

Remarque

G est tel que : $\boxed{\int_{\Sigma} \overrightarrow{GA}\,\mathrm{d}m = \vec{0}}$. Lorsque le solide possède un plan ou un axe de symétrie matérielle, G appartient à cet élément de symétrie.

■ Référentiel du centre de masse (barycentrique)

On appelle référentiel barycentrique, noté (R*), le référentiel dont l'origine coïncide avec le centre de masse du solide et dont les axes ont des directions fixes par rapport au référentiel d'étude (R). (R*) est donc en translation dans (R).

Remarque

Attention il s'agit ici de translation au sens large, curviligne, elliptique ou circulaire, et pas uniquement rectiligne : pour deux points G et H fixes dans (R*) le vecteur $\overrightarrow{GH}$ reste constant (en norme et direction) au cours du mouvement de (R*) dans (R)).

→ Le mouvement relatif du solide dans (R*) est un mouvement de rotation autour de G de vecteur rotation instantanée : $\boxed{\overrightarrow{\omega^*} = \overrightarrow{\omega_{S/R^*}} = \overrightarrow{\omega_{S/R}}}$.

→ Dans la composition des vitesses et accélérations entre (R) et (R*), on a :

$$\boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(G)} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{a_e}(M) = \overrightarrow{a_a}(G)}.$$

■ Éléments cinétiques du solide

❑ Résultante cinétique

→ Par extension des résultats du cours de première année, on désigne par résultante cinétique d'un solide l'objet : $\boxed{\vec{P} = \int_\Sigma \mathrm{d}m\,\overrightarrow{V_A}}$ où $\overrightarrow{V_A}$ désigne la vitesse d'un point courant A du solide Σ.

Compte tenu de la définition du centre de masse, il vient : $\boxed{\vec{P} = M\,\overrightarrow{V_G}}$.

Remarque

Notons que, par rapport à un référentiel (R) donné, la résultante cinétique d'un solide est celle de son centre de masse G auquel on aurait affecté toute la masse M du système.

❑ Résultante cinétique dans (R*)

Propriété fondamentale de (R*) : dans (R*), la résultante cinétique est nulle $\boxed{\overrightarrow{P^*} = \vec{0}}$.

❑ Le moment cinétique d'un solide

→ Par extension des résultats du cours de première année, on désigne par moment cinétique par rapport au point O l'objet : $\boxed{\overrightarrow{L_O} = \int_\Sigma \overrightarrow{OA} \wedge \mathrm{d}m\,\overrightarrow{V_A}}$.

❑ Moment cinétique en projection suivant un axe et moment d'inertie d'un solide en rotation

Soit un solide Σ en rotation autour d'un axe Δ fixe dans (R) à la vitesse angulaire ω. Le moment cinétique en projection sur Δ s'écrit : $\boxed{L_\Delta = \omega J_\Delta}$ où $\boxed{J_\Delta = \int_\Sigma r^2\,\mathrm{d}m}$ est le **moment d'inertie** du système par rapport à l'axe Δ, r étant la distance à l'axe d'un point A.

❑ Moment cinétique dans le cas général

Le moment cinétique d'un solide en un point O de son axe de rotation Δ est dans le cas général la somme de deux termes : $\boxed{\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{L_{O\parallel}} + \overrightarrow{L_{O\perp}}}$ où $\overrightarrow{L_{O\parallel}} = J_\Delta\,\vec{\omega}$ est suivant l'axe de rotation et $\overrightarrow{L_{O\perp}}$ lui est perpendiculaire. Dans le cas particulier où l'axe de rotation **Δ est axe de symétrie du solide, ou s'il est perpendiculaire à un plan de symétrie matérielle** du solide, on a $\overrightarrow{L_{O\perp}} = \vec{0}$. Dans ce cas seulement, on peut écrire la relation vectorielle : $\boxed{\overrightarrow{L_O} = J_\Delta\,\vec{\omega}}$.

❑ L'énergie cinétique

Elle a pour expression $\boxed{Ec = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Sigma \mathrm{d}m\,V_A^2}$.

❑ Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un système solide S en rotation pure autour d'un axe Δ fixe dans (R) à la vitesse angulaire ω. L'énergie cinétique s'écrit : $\boxed{E_C = \dfrac{1}{2} J_\Delta\,\omega^2}$ où J_Δ est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe Δ.

■ Référentiel barycentrique et théorème de Koenig

❑ Résultante cinétique dans (R*)

Propriété fondamentale de (R*) : dans (R*), la résultante cinétique est nulle $\boxed{\overrightarrow{P^*} = \vec{0}}$.

❑ Premier théorème de Koenig

Il s'écrit $\boxed{\overrightarrow{L_{O/R}} = \overrightarrow{OG} \wedge M\,\overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{L_G^*}}$, où $\overrightarrow{L_G^*} = \displaystyle\int_S \overrightarrow{GA} \wedge \mathrm{d}m\,\overrightarrow{V_A^*}$ (ou plus explicitement $\overrightarrow{L_{G/R^*}}$) désigne le moment cinétique du système par rapport au centre de masse évalué dans (R*) et où $\overrightarrow{OG} \wedge M\,\overrightarrow{V_G}$ désigne le moment cinétique dans le référentiel (R), par rapport à O, du centre de masse du système affecté de sa masse totale. Dans (R*) le moment cinétique étant indépendant du point où on l'évalue, on note simplement : $\boxed{\overrightarrow{L_{O/R}} = \overrightarrow{OG} \wedge M\,\overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{L^*}}$.

⇨ **Méthode 1.5. Moment cinétique et énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe mobile mais de direction fixe**

❑ Second théorème de Koenig

Il s'écrit $\boxed{Ec_{/R} = E_c^* + \dfrac{1}{2} M\,V_G^2}$, où $E_c^* = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_S \mathrm{d}m\,V_A^{*2}$ désigne l'énergie cinétique du système correspondant à son mouvement dans (R*) et $\dfrac{1}{2} M\,V_G^2$ l'énergie cinétique dans (R) du centre de masse affecté de sa masse totale.

⇨ **Méthode 1.5. Moment cinétique et énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe mobile mais de direction fixe**