Chapitre 1
Éléments de description du solide

La lecture des *Éléments* d'Euclide pousse Pierre **Varignon** vers l'étude de la géométrie et de la mécanique. Comprenant tout de suite l'importance du calcul différentiel établi par **Leibniz** et **Newton** en cette fin de XVII^{e} siècle, il démontre aussitôt plusieurs théorèmes de mécanique et il introduit la notion de vitesse à chaque instant que de nos jours nous appelons vitesse instantanée. Il se bat alors pour faire reconnaître en France l'intérêt du calcul différentiel. C'est sans compter avec la pugnacité de Michel **Rolle**. Ce mathématicien auvergnat, dont le nom est pourtant attaché à un théorème sur la dérivation, reprocha à cette nouvelle théorie de ne reposer sur rien de tangible. À l'automne 1706, Rolle reconnut son erreur et exprima à Varignon sa contrition pour cette mauvaise querelle.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- La définition du solide et le nombre de degrés de liberté qu'il possède.
- La définition du centre de masse d'un solide.
- La définition du moment d'inertie.
- La relation de Varignon.
- La forme générale de la vitesse d'un solide et son expression dans les cas particuliers de translation pure ou de rotation pure autour d'un axe fixe.
- La formule de dérivation dans un trièdre mobile.
- La définition du référentiel barycentrique.
- Les définitions des éléments cinétiques d'un solide que sont la résultante cinétique, le moment cinétique et l'énergie cinétique.
- Connaître la forme du moment cinétique et de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

Ce qu'il faut savoir faire

- Savoir recenser le nombre de paramètres indépendants intervenant dans l'étude cinématique.
- Savoir choisir une base dans laquelle expliciter simplement le mouvement.
- Savoir mettre en œuvre les formules de changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations.
- Savoir analyser le mouvement instantané d'un solide.
- Et plus si affinité… savoir faire le lien avec le cours de mécanique de science industrielle.

■■ Résumé de cours

■ Le modèle du solide indéformable

❑ Définition

On appelle solide indéformable ou plus simplement solide, un système invariable de points matériels : les distances mutuelles entre les différents points du solide restent constantes.
→ Le solide possède **6 degrés de liberté**.

Remarque

La notion de solide indéformable et donc parfaitement rigide n'est qu'un modèle idéal, la réalité naturelle et technologique étant plus complexe…

■ Distribution des vitesses d'un solide

❑ Relation de Varignon

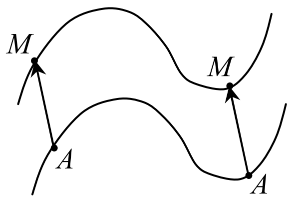
Soient A et M deux points d'un même solide S. Leur vitesse est liée par la relation de Varignon $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}}$ où $\vec{\omega}(t)$ est le vecteur rotation instantanée du solide que nous noterons plus simplement $\vec{\omega}$.

❑ Mouvement instantané d'un solide

Définition : On appelle axe instantané de viration ou axe central du torseur cinématique (dit encore axe de vissage du solide) l'axe Δ parallèle à $\overrightarrow{\omega(t)}$. En tout point de cet axe, la vitesse est colinéaire à $\overrightarrow{\omega(t)}$. De plus, l'axe Δ est le lieu des points de vitesses minimum du solide.
Soit O appartenant à Δ un point du solide S et M un point quelconque de S, la relation de Varignon entre O et M donne : $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_O} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V_{\parallel}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$.
→ Le terme $\overrightarrow{V_{\parallel}}$ colinéaire à Δ est dit **vitesse de glissement** le long de Δ. $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ est un terme de **rotation autour de Δ** à la vitesse angulaire instantanée ω.

→ Le mouvement instantané le plus général d'un solide est un **mouvement hélicoïdal**, combinaison d'une translation le long de Δ et d'une rotation autour de Δ.

❑ Mouvement de translation

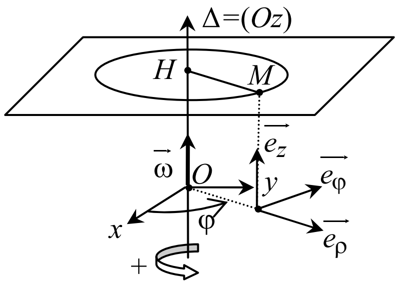


Un solide S est dit en translation dans le référentiel (R) si pour tous points A et M appartenant à S, on a : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{cte}$. Dans ce cas, $\dfrac{\mathrm{d}\left(\overrightarrow{AM}\right)}{\mathrm{d}t} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} \quad \forall (A, M) \in S$. Tous les points de S

ont même vitesse et même accélération et par comparaison avec la relation de Varignon, on a : $\boxed{\vec{\omega}(t)=\vec{0}}$.

❑ Mouvement de rotation pure autour d'un axe

Un solide S est en rotation autour d'un axe Δ fixe passant par une origine O fixe d'un référentiel (R), lorsque tout point M de S décrit un mouvement de circulaire de rayon HM dans un plan perpendiculaire à Δ, où H est le projeté orthogonal de M sur Δ. En adoptant le système de coordonnées polaires qui est le trièdre adapté aux symétries du problème, la vitesse du point M est : $\boxed{\overrightarrow{V_M}=\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}}$ où $\boxed{\vec{\omega}=\omega\,\overrightarrow{e_z}=\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_z}}$ est orienté suivant le sens de rotation positif à l'aide de la **règle du tire bouchon**.



⇨ Méthode 1.2.

■ Changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations

Dans tout ce qui suit, (R) rapporté à $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ est un référentiel absolu et (R') rapporté à $(O',\overrightarrow{e_{x'}},\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_{z'}})$ est un référentiel relatif en mouvement dans (R). On note $\vec{\Omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de (R') par rapport à (R).

❑ Dérivation dans un trièdre mobile

Soit $\vec{K}=K_{x'}\,\overrightarrow{e_{x'}}+K_{y'}\,\overrightarrow{e_{y'}}+K_{z'}\,\overrightarrow{e_{z'}}$ un vecteur exprimé dans (R'), les dérivées temporelles dans (R) et (R') sont liées par : $\boxed{\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R=\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{K}}$.

⇨ Méthode 1.1

❑ Composition des vitesses de rotation

Soient A et B deux points d'un même solide de référence $S2$ en rotation par rapport à $S0$ et $S1$ avec les vecteurs rotations instantanées respectives $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$ et $\overrightarrow{\omega_{2/1}}$. On associe à chacun de ces solides les référentiels (R_0,), (R_1) et (R_2.) On a : $\boxed{\overrightarrow{\omega_{2/1}}=\overrightarrow{\omega_{2/0}}+\overrightarrow{\omega_{0/1}}}$.

⇨ Méthode 1.1

❑ Composition des vitesses

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').
On définit :

→ sa **vitesse absolue** comme sa vitesse par rapport à (R) : $\overrightarrow{V_a}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R$

→ sa **vitesse relative** comme sa vitesse par rapport à (R') : $\overrightarrow{V_r}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$

→ sa **vitesse d'entraînement** de M comme la vitesse d'un point P fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M : $\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(O') + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$.

On a alors : $\boxed{\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}(M)}$.

❑ Composition des accélérations

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').

→ son **accélération absolue** par rapport à (R) s'écrit : $\overrightarrow{a_a}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}}{\mathrm{d}t}\right|_R$

→ son **accélération relative** par rapport à (R') s'écrit : $\overrightarrow{a_r}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{R'} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_r}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$

→ son **accélération d'entraînement** qui est celle d'un point P fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M s'écrit :

$$\overrightarrow{a_e}(M) = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R = \overrightarrow{a_a}(P) = \overrightarrow{a_a}(O') + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'P} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

→ son **accélération de Coriolis** s'écrit : $\overrightarrow{a_c}(M) = 2\,\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$.

On a alors : $\boxed{\overrightarrow{a_a}(M) = \overrightarrow{a_r}(M) + \overrightarrow{a_e}(M) + \overrightarrow{a_c}(M)}$.

■ Centre de masse d'un solide

On note (R) le référentiel d'étude et O une origine quelconque liée à (R). Soit A un point courant du solide Σ. On décompose ici la masse sa M en éléments de masse dm(A) autour du point A, de sorte que : $M = \int_\Sigma \mathrm{d}m$. Attention, ici (et dans toute la suite) le signe $\int_\Sigma$ traduit, de façon condensée, la sommation sur l'ensemble du solide dans les trois cas suivants :

→ $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\tau$ et $\int_\Sigma = \iiint_\vartheta$ pour une **distribution volumique** de volume ϑ,

→ $\mathrm{d}m = \mathrm{d}S$ et $\int_\Sigma = \iint_S$ pour une **distribution surfacique** de surface S,

→ $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}l$ et $\int_\Sigma = \int_L$ pour une **distribution linéique** de longueur L.

Dans ces expressions ρ, σ et λ désignent respectivement la densité volumique, surfacique et linéique de masse.

Remarque

Notons que, dans le cas général, ρ, σ et λ dépendent de la position du point courant A de la distribution de masse du système. Ce n'est que lorsque le système est homogène qu'ils sont constants. On note l'analogie avec les distributions de charge en électrostatique.

→ On définit le centre de masse d'une distribution volumique par : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\int_{\Sigma} \overrightarrow{OA}\, \mathrm{d}m(A)}$.

Remarque

G est tel que : $\boxed{\int_{\Sigma} \overrightarrow{GA}\, \mathrm{d}m = \vec{0}}$. Lorsque le solide possède un plan ou un axe de symétrie matérielle, G appartient nécessairement à cet élément de symétrie.

■ Référentiel du centre de masse (barycentrique)

Définition : On appelle référentiel barycentrique, noté (R*), le référentiel dont l'origine coïncide avec le centre de masse du solide et dont les axes ont des directions fixes par rapport au référentiel d'étude (R). (R*) est donc en translation dans (R).

Remarque

Il s'agit ici de **translation au sens large**, curviligne, elliptique ou circulaire, et pas uniquement rectiligne : pour deux points G et H fixes dans (R*) le vecteur $\overrightarrow{GH}$ reste constant (en norme et direction) au cours du mouvement de (R*) dans (R).

Le mouvement relatif du solide dans (R*) est un mouvement de rotation autour de G de vecteur rotation instantanée $\boxed{\vec{\omega}^* = \vec{\omega}_{S/R^*} = \vec{\omega}_{S/R}}$.

Dans la composition des vitesses et accélérations entre (R) et (R*), on a : $\boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(G)}$ et $\boxed{\overrightarrow{a_e}(M) = \overrightarrow{a_a}(G)}$.

■ Éléments cinétiques d'un système du solide

❑ La résultante cinétique

→ On désigne par résultante cinétique la résultante du torseur cinétique : $\boxed{\vec{P} = \int_{\Sigma} \mathrm{d}m\, \overrightarrow{V_A}}$ où $\overrightarrow{V_A}$ désigne la vitesse d'un point courant A du solide Σ. Compte tenu de la définition du centre de masse, il vient alors : $\boxed{\vec{P} = M\, \overrightarrow{V_G}}$.

Remarque

Notons que, par rapport à un référentiel (R) donné, la résultante cinétique d'un solide est celle de son centre de masse G auquel on aurait affecté toute la masse M du système.

❑ Résultante cinétique dans (R*)

Propriété fondamentale de (R*) : dans (R*), la résultante cinétique est nulle $\boxed{\overrightarrow{P^*} = \vec{0}}$.

❑ Le moment cinétique d'un solide

→ On désigne par moment cinétique le moment résultant du torseur cinétique :

$\boxed{\overrightarrow{L_O} = \int_\Sigma \overrightarrow{OA} \wedge \mathrm{d}m\,\overrightarrow{V_A}}$.

❑ Structure de torseur cinétique

Pour un point O' différent de O on a : $\boxed{\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{L_{O'}} + \vec{P} \wedge \overrightarrow{OO'}}$. On reconnaît la relation de changement de point d'un torseur de centre de réduction O, pour lequel $\vec{P}$ est la résultante indépendante du point et $\overrightarrow{L_O}$ le moment résultant en O.

❑ Moment cinétique en projection suivant un axe et moment d'inertie d'un solide en rotation

Soit un solide Σ en rotation autour d'un axe Δ fixe dans (R) à la vitesse angulaire ω. Le moment cinétique en projection sur Δ s'écrit : $\boxed{L_\Delta = \omega J_\Delta}$ où $\boxed{J_\Delta = \int_\Sigma r^2\,\mathrm{d}m}$ est **le moment d'inertie** du système par rapport à l'axe Δ, r étant la distance à l'axe d'un point A.

❑ Moment cinétique dans le cas général

Le moment cinétique d'un solide en un point O de son axe de rotation Δ est dans le cas général la somme de deux termes : $\boxed{\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{L_{O\parallel}} + \overrightarrow{L_{O\perp}}}$ où $\overrightarrow{L_{O\parallel}} = J_\Delta\,\vec{\omega}$ est suivant l'axe de rotation et $\overrightarrow{L_{O\perp}}$ lui est perpendiculaire.

⇨ **Méthode 1.3.**

Dans le cas particulier où l'axe de rotation Δ est axe de symétrie du solide, ou s'il est perpendiculaire à un plan de symétrie matérielle du solide (on dit que Δ est **axe principal d'inertie** du solide), on a $\overrightarrow{L_{O\perp}} = \vec{0}$. Dans ce cas seulement, on peut écrire la relation vectorielle : $\boxed{\overrightarrow{L_O} = J_\Delta\,\vec{\omega}}$.

❑ L'énergie cinétique

Elle a pour expression $\boxed{Ec = \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathrm{d}m\,V_A^2}$.

❑ Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un système solide S en rotation pure autour d'un axe Δ fixe dans (R) à la vitesse angulaire ω. L'énergie cinétique s'écrit : $\boxed{E_C = \frac{1}{2} J_\Delta\,\omega^2}$ où J_Δ est le moment d'inertie du système par rapport à l'axe Δ.

■■ Méthodes

■ Description cinématique d'un solide

❑ Méthode 1.1. Comment dériver un vecteur dans un trièdre mobile ?

Dans de nombreux problème de cinématique il est fréquent d'avoir à exprimer la dérivée temporelle d'un grandeur vectorielle $\overrightarrow{K}$ dans un référentiel absolu (R) notée $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R$, en fonction de celle dans un référentiel relatif (R') notée $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$, (R') étant en rotation par rapport à (R) caractérisée par un vecteur rotation instantanée $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}$. Le lien entre ces deux dérivées est fait par la formule de dérivation vectorielle dans un trièdre $\boxed{\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}}{\mathrm{d}t}\right|_R = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{K}}$ (relation que nous noterons D2 dans les exercices).

Cette expression traduit le fait que le vecteur $\overrightarrow{K}$, suivant la base dans laquelle il est explicité, ne se dérive pas de la même façon. En effet, s'il est explicité dans (R), sa dérivée temporelle ne fait pas intervenir celles des vecteurs unitaires de la base attachée à (R). Au contraire si $\vec{e}\,'$ désigne l'un des vecteurs unitaires du trièdre attaché à (R'), on a : $\boxed{\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}\,'}{\mathrm{d}t}\right|_R = \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{e}\,'}$ (relation que nous noterons D1 dans les exercices) et la dérivée de $\overrightarrow{K}$ explicité dans (R') doit en tenir compte. Cette dernière relation D1 s'applique de façon générale à tout bipoint rigidement liée au solide de référence attaché à (R').

⇨ **Exercices 1.2 et 1.3**

Soit un référentiel absolu (R) rapporté à $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ et un référentiel relatif (R') rapporté à $(O',\overrightarrow{e_x}',\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_{z'}})$, en mouvement dans (R). On note $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}$ le un vecteur rotation instantanée de (R') par rapport à (R). Soit $\overrightarrow{K} = K_{x'}\,\overrightarrow{e_{x'}} + K_{y'}\,\overrightarrow{e_{y'}} + K_{z'}\,\overrightarrow{e_{z'}}$ un vecteur exprimé dans (R'). Les vecteurs unitaires $(\overrightarrow{e_{x'}},\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_{z'}})$ étant fixes dans (R'), la dérivation temporelle y est évidente : $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{K}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} = \left.\dfrac{\mathrm{d}K_{x'}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}\overrightarrow{e_{x'}} + \left.\dfrac{\mathrm{d}K_{y'}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}\overrightarrow{e_{y'}} + \left.\dfrac{\mathrm{d}K_{z'}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}\overrightarrow{e_{z'}}$.

Ces mêmes vecteurs ne sont pas constants dans (R), ainsi la dérivation dans (R) doit tenir compte de leur évolution, ce qui entraîne l'égalité suivante :