Chapitre 1

Référentiels non galiléens

Quelle différence entre un repère et un référentiel ? Pour certains, les deux mots sont synonymes ; mais on désigne plutôt par référentiel un objet physique, et par repère sa description mathématique. Mais d'où viennent ces deux termes ? Le mot *repère* vient du verbe latin *rapatriare*, devenu *reperire* qui signifiait *revenir dans sa patrie*. Le verbe a bientôt signifié *retrouver* et le mot repère apparaît en français vers 1680 dans le sens de *marque*. On l'utilise alors en mathématiques dans son sens actuel. Bien que lui aussi d'origine latine, le mot *référence* est emprunté à l'anglais au début du XVII^{e} siècle. Le terme référentiel en dérive et n'apparaît dans notre langue qu'au début des années 1950.

Objectifs

Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les différents types de mouvement d'un référentiel par rapport à un autre
- ▷ Le vecteur rotation
- ▷ Les lois de composition des vitesses et des accélérations
- ▷ Les notions de vitesse et d'accélération d'entraînement et de point coïncident
- ▷ Les expressions des vitesses et accélération d'entraînement dans les deux cas particuliers
- ▷ La définition de l'accélération de Coriolis
- ▷ Les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis
- ▷ Les référentiels d'utilisation courante
- ▷ Quelques effets du caractère non galiléen du référentiel terrestre

Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Identifier le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre
- ▷ Calculer une vitesse et une accélération avec les lois de composition
- ▷ Déterminer par une analyse des ordres de grandeurs si un référentiel est galiléen ou pas
- ▷ Mener une étude statique ou dynamique en référentiel non galiléen

■■ Résumé de cours

■ Cinématique du changement de référentiel

❑ Position du problème

Dans tout ce qui suit, (R) rapporté à $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ est un référentiel absolu et (R') rapporté à $(O',\overrightarrow{e_{x'}},\overrightarrow{e_{y'}},\overrightarrow{e_{z'}})$ est un référentiel relatif en mouvement dans (R). On note $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R}$ le vecteur rotation instantanée de (R') par rapport à (R). On peut associer à un référentiel un solide indéformable dit **solide de référence**. Etudier le mouvement du référentiel (R') par rapport à (R) revient alors à étudier le mouvement du solide attaché à (R') dans la base attachée à (R).

■ Distribution des vitesses d'un solide de référence

❑ Relation de Varignon

Soient A et M deux points d'un même solide de référence S. Leur vitesse est liée par la **relation de Varignon** $\boxed{\overrightarrow{V_M}=\overrightarrow{V_A}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}}$ où $\vec{\omega}(t)$ est le vecteur rotation instantanée du solide que nous noterons plus simplement $\vec{\omega}$.

❑ Mouvement instantané le plus général d'un solide

On appelle axe instantané de viration ou axe central du torseur cinématique (dit encore axe de vissage du solide) l'axe Δ parallèle à $\vec{\omega}(t)$. En tout point de cet axe, la vitesse est colinéaire à $\vec{\omega}(t)$. De plus, l'axe Δ est le lieu des points de vitesses minimales du solide.

Soit O un point du solide S appartenant à Δ et M un point quelconque de S, la relation de Varignon entre O et M donne : $\boxed{\overrightarrow{V_M}=\overrightarrow{V_O}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{V_\parallel}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}}$.

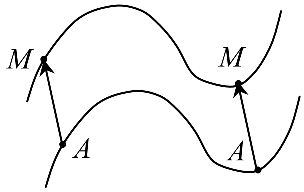
→ Le terme $\overrightarrow{V_\parallel}$, colinéaire à Δ, est appelé vitesse de glissement le long de Δ. $\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$ est un terme de rotation autour de Δ à la vitesse angulaire instantanée ω.

⇨ **Méthode 1.2. Comment caractériser le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe ?**

→ Le mouvement instantané le plus général d'un solide est un mouvement hélicoïdal, combinaison d'une translation le long de Δ et d'une rotation autour de Δ.

❑ Mouvement de translation

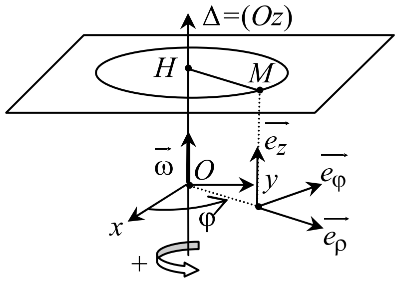
Un solide S est en translation dans le référentiel (R) si pour tout point A et M appartenant à S, on a : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{cte}$. Attention il ne s'agit pas ici de translation rectiligne mais curviligne (translation elliptique, circulaire ou suivant une courbe quelconque).



Dans ce cas, $\dfrac{d\overrightarrow{AM}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A},\ \forall (A,M) \in S$. Tous les points de S ont même vitesse et même accélération. Par comparaison avec la relation de Varignon, on a : $\boxed{\vec{\omega}(t) = \vec{0}}$.

❑ Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Un solide S est en rotation autour d'un axe Δ fixe passant par une origine O fixe d'un référentiel (R), lorsque tout point M de S décrit un mouvement circulaire de rayon HM dans un plan perpendiculaire à Δ, où H est le projeté orthogonal de M sur Δ. En adoptant le système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz) qui est le trièdre adapté aux symétries du problème, la vitesse du point M est : $\boxed{\overrightarrow{V_M} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$ où $\boxed{\vec{\omega} = \omega\, \overrightarrow{e_z} = \dot{\varphi}\, \overrightarrow{e_z}}$ est orienté suivant à l'aide de la **règle du tire bouchon**.



⇨ **Méthode 1.2. Comment caractériser le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe ?**

❑ Point coïncident

Soit un point matériel M mobile rapport à (R'). On appelle **point coïncident** avec M dans (R') à l'instant t le **point *P* fixe** de (R'), coïncident avec M à l'instant t. L'ensemble des points P successivement occupé par M est la trajectoire de M dans (R').

■ Changement de référentiel pour les vitesses et les accélérations

❑ Dérivation dans un trièdre mobile

Soit $\vec{K} = K_{x'}\, \overrightarrow{e_{x'}} + K_{y'}\, \overrightarrow{e_{y'}} + K_{z'}\, \overrightarrow{e_{z'}}$ un vecteur exprimé dans (R'), les dérivées temporelles dans (R) et (R') sont liées par $\boxed{\left.\dfrac{d\vec{K}}{dt}\right|_R = \left.\dfrac{d\vec{K}}{dt}\right|_{R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{K}}$.

⇨ **Méthode 1.1. Comment dériver un vecteur dans un trièdre mobile ?**

❑ Composition des vitesses de rotation

Soient A et B deux points d'un même solide de référence $S2$ en rotation par rapport à $S0$ et $S1$ avec les vecteurs rotations instantanées respectives $\overrightarrow{\omega_{2/0}}$ et $\overrightarrow{\omega_{2/1}}$. On associe à chacun de ces solides les référentiels (R_0), (R_1) et (R_2). On a $\boxed{\overrightarrow{\omega_{2/1}} = \overrightarrow{\omega_{2/0}} + \overrightarrow{\omega_{0/1}}}$.

❑ Composition des vitesses

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').

On définit :

→ sa **vitesse absolue** comme sa vitesse par rapport à (R) : $\overrightarrow{V_a}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_R$

→ sa **vitesse relative** comme sa vitesse par rapport à (R') : $\overrightarrow{V_r}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$

→ sa **vitesse d'entraînement** de M comme la vitesse du point coïncidant P (fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M) : $\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$.

On a alors $\boxed{\overrightarrow{V_a}(M) = \overrightarrow{V_r}(M) + \overrightarrow{V_e}(M)}$.

❑ Composition des accélérations

Soit un point matériel M repéré à l'instant t par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans (R) et par $\overrightarrow{O'M}$ dans (R').
On définit :

→ son **accélération absolue** par rapport à (R) : $\overrightarrow{a_a}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_a}}{\mathrm{d}t}\right|_R$

→ son **accélération relative** par rapport à (R') : $\overrightarrow{a_r}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{R'} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_r}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'}$

→ son **accélération d'entraînement** qui est celle du point coïncidant P (fixe dans (R') et coïncidant à l'instant t avec M) :

$$\overrightarrow{a_e}(M) = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t^2}\right|_R = \overrightarrow{a_a}(P) = \overrightarrow{a_a}(O') + \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{\Omega}_{R'/R}}{\mathrm{d}t}\right|_R \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P}\right)$$

→ son **accélération de Coriolis** : $\overrightarrow{a_c}(M) = 2\,\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$.

On a alors $\boxed{\overrightarrow{a_a}(M) = \overrightarrow{a_r}(M) + \overrightarrow{a_e}(M) + \overrightarrow{a_c}(M)}$.

⇨ **Méthode 1.3. Comment utiliser les lois de composition ?**

❑ Cas où (R') est en translation et où (R') en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Cas de la translation

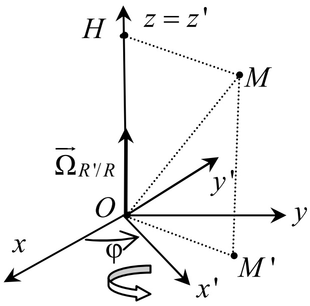
Dans ce cas, les axes du référentiel (R') gardent une direction fixe par rapport à ceux de (R) de sorte que $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$. Ainsi, la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement ont une expression particulièrement simple $\boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{V_{/R}}(O')}$ et $\boxed{\overrightarrow{a_e}(M) = \overrightarrow{a_a}(O') = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_e}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_R}$.

L'accélération de Coriolis est nulle puisque $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$.

Remarque

Notons que c'est seulement dans ce cas que l'accélération d'entraînement s'identifie avec la dérivée de la vitesse d'entraînement.

Cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe dans (R)



Considérons un référentiel (R') rapporté à $(O', \overrightarrow{e_{x'}}, \overrightarrow{e_{y'}}, \overrightarrow{e_{z'}})$ en rotation autour de l'axe (Oz) du référentiel (R) rapporté à $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ avec $O = O'$ et $(Oz) = (Oz')$.

Cette rotation est repérée par l'angle $\varphi(t) = \left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_{x'}}\right)$ et le vecteur rotation de (R') par rapport à (R) s'écrit $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} = \dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_z}$. Lorsque la rotation est uniforme : $\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} = cte\,\overrightarrow{e_z}$.

En désignant par H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation (Oz) on a :

$\boxed{\overrightarrow{V_e}(M) = \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{HM}}$ et $\boxed{\overrightarrow{a_e}(M) = \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) = -\Omega^2{}_{R'/R}\,\overrightarrow{HM}}$.

⇨ **Méthodes 1.2. Comment caractériser le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe ?**

Remarque

On parle dans ce cas, pour l'accélération d'entraînement, d'accélération centripète puisqu'elle pointe vers le centre H de rotation du point M. Dans le cas contraire elle est dite centrifuge car elle pointe de H vers M : elle « fuit » le centre de rotation.

■ Dynamique en référentiel non galiléen

❑ Théorème de la résultante cinétique

Le PFD (ou le TRC pour un solide) reste valable dans un référentiel (R') non galiléen à condition d'adjoindre à la résultantes des actions extérieurs $\overrightarrow{R_{ext}}$ les forces d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_{ie}}$ et de Coriolis $\overrightarrow{f_{ic}}$ s'exerçant sur le système du fait du caractère non galiléen du référentiel :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} = \overrightarrow{R_{ext}} + \overrightarrow{f_{ie}} + \overrightarrow{f_{ic}}}.$$

Les termes $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e}$ et $\overrightarrow{f_{ic}} = -m\overrightarrow{a_c}$ sont les **termes inertiels**, où $\overrightarrow{a_e}$ et $\overrightarrow{a_c}$ désignent respectivement les accélérations d'entraînement et de Coriolis du système de masse m.

Lorsque ces termes sont négligeables devant $\overrightarrow{R_{ext}}$ (R') peut être considéré comme une bonne réalisation d'un référentiel galiléen.

⇨ **Méthode 1.4. Comment appliquer les lois de la dynamique en référentiel non galiléen ?**

❑ TMC par rapport à un point A fixe dans un référentiel non galiléen

Comme pour le TRC, il reste valable dans un référentiel (R') non galiléen à condition d'adjoindre au moment résultant en A des actions extérieurs $\overrightarrow{M}_{A_{ext}}$ les moments en ce même

point des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis s'exerçant sur le système du fait du caractère non galiléen du référentiel.
Il en va de même pour le TMC en projection suivant un axe de rotation, le point A étant généralement choisi sur l'axe.

❑ Théorèmes énergétiques dans un référentiel non galiléen

Théorème de l'énergie cinétique
Si on applique le TEC dans un **référentiel non galiléen**, il faut tenir compte, en plus de travail des actions extérieures, du travail des forces d'inertie d'entraînement. La force de Coriolis qui est toujours perpendiculaire au déplacement ne travaille pas :
$\boxed{\mathrm{d}E_{c_{R'}} = \delta W_{ext} + \delta W\left(\overrightarrow{f_{ie}}\right)}$, soit $\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\right|_{R'} = P_{ext} + P\left(\overrightarrow{f_{ie}}\right)}$ qui constitue le théorème de la puissance cinétique.

Énergie potentielle centrifuge et théorème de l'énergie mécanique
Dans le cas d'une rotation uniforme à la vitesse angulaire ω, la force d'inertie d'entraînement (centrifuge) dérive d'une énergie potentielle : $\boxed{E_{p\,cf} = -\frac{1}{2}m\,\omega^2 HM^2}$ où H est le projeté de M sur l'axe.
On doit l'inclure dans l'énergie potentielle totale dans l'utilisation du théorème de l'énergie mécanique.

■ Caractère galiléen approché de quelques référentiels

Le caractère approximativement galiléen d'un référentiel (R') en mouvement par rapport à un autre référentiel (R) considéré comme galiléen est contrôlable expérimentalement : le principe d'inertie doit y être vérifié avec la meilleure approximation possible. Si compte tenu des échelles spatio-temporelles mises en jeu lors qu'un processus physique, l'écart au principe d'inertie n'est pas détectable, le référentiel en question est une très bonne approximation d'un référentiel galiléen. Dans le cas contraire, les termes inertiels ne sont plus négligeables devant les autres termes dans le PFD et le caractère non galiléen ne peut être négligé.

❑ Référentiel de Copernic
Il a pour centre le centre de masse du système solaire et ses axes pointes vers trois étoiles fixes. Il s'agit de la meilleure approximation d'un référentiel galiléen. On ne l'utilise que pour les mouvements d'objets à l'échelle du système solaire (planètes, comètes...).

❑ Référentiel géocentrique
Son centre est au centre de la Terre et ses axes sont dirigés vers trois étoiles fixes. Il est une bonne approximation de référentiel galiléen pour l'étude de mouvements au voisinage de la Terre (satellites...), sur une échelle de temps de quelques heures ou jours.

❑ Référentiel terrestre et référentiel du laboratoire

Référentiels liés à la Terre et utilisable en pratique à notre échelle. Leur caractère galiléen est suffisamment précis pour des expériences brèves (jusqu'à quelques minutes) sur de faible échelles de longueurs.

■ Quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre

❑ Variation du champ de pesanteur entre pôle et équateur

Le poids $\vec{P}$ est constitué de l'attraction gravitationnelle (de la Terre en négligeant les termes de marée liés aux autres astres proches) et de la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. En posant $\vec{P}(M) = m\vec{g}(M)$ où m est la masse, on défini le champ de pesanteur $\vec{g}$ en un point M par $\boxed{\vec{g}(M) \approx -G\frac{M_{Terre}}{R_{Terre}^2}\vec{e_r} + \omega^2\,\overrightarrow{HM}}$ où H est le projeté de M sur l'axe des pôles et $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ (SI) est la constante de gravitation.

Le premier terme (prépondérant) est le **champ de gravitation** exercé par la Terre.

Le second provient de la **force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre** autour de son axe, il varie en fonction de la latitude induisant d'une part un écart local à la verticalité et d'autre part une variation de la norme de $\vec{g}$ de l'ordre de 0,2 % entre pôle et équateur.

❑ Effets de la force de Coriolis

Contrairement au poids, la force de Coriolis due à la rotation de la Terre est dynamique et agit sur les systèmes en mouvement. Elle n'est pas incluse dans la définition du poids. Parmi ses effets observables citons l'expérience du pendule de Foucault ou la déviation vers l'est. Cette dernière à une importance particulière puisqu'elle est responsable, à l'échelle de la Terre, des mouvements des masses d'air entre pôles et équateur créant les alizés, de la formation des dépressions, des cyclones et anticyclones...

⇨ **Méthode 1.5. Quelles conséquences du caractère non galiléen du référentiel terrestre ?**