Chapitre 1
Systèmes linéaires

On entend par *système linéaire* une transformation qui opère
sur des grandeurs physiques par une combinaison d'entres-elles
toutes exprimées au degré 1. C'est en fait un schéma mathématique
qui s'applique à différents modèles de la physique,
et même à d'autres disciplines comme l'économie.
Pourquoi *linéaire* ?
Les droites ont des équations cartésiennes de degré 1 ;
on a donc nommé ceci sur le mot latin *linea*, *ligne*,
tout ce qui touche au degré 1. À l'époque, on parlait de ligne
droite, ce qu'on abrège de nos jours en droite.

■■ Objectifs

■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ La forme générale de la relation entrée-sortie d'un système linéaire
- ▷ Le critère caractérisant le fonctionnement linéaire d'un système
- ▷ La signification de la représentation spectrale d'un signal

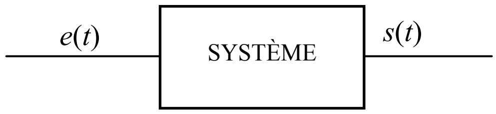
■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Savoir écrire rapidement la forme générale d'une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants, du premier ou du deuxième ordre
- ▷ Savoir trouver rapidement la solution particulière d'une équation différentielle linéaire dans les cas où le « deuxième membre » est une fonction constante ou une fonction sinusoïdale
- ▷ Savoir justifier les conditions initiales par des conditions de continuité de grandeurs physiques
- ▷ Savoir trouver le spectre d'une fonction connaissant son expression temporelle

■■ Résumé de cours

■ Définitions

On envisage des systèmes constitués d'un ensemble de composants et destinés à opérer sur des grandeurs physiques. Cela peut être un système électrique ou électronique, un système mécanique, thermique, acoustique, etc.
On définit une grandeur d'entrée $e(t)$, éventuellement variable dans le temps, qui traduit une contrainte imposée par l'extérieur au système.
La réaction ou réponse du système à cette contrainte se traduit par une grandeur de sortie $s(t)$ éventuellement variable dans le temps.
Cette grandeur n'est pas nécessairement du même type que la grandeur d'entrée. Une représentation unifilaire est possible.



Le système est dit **linéaire mathématiquement** si, à l'entrée $e(t) = \lambda \cdot e_1(t) + \mu \cdot e_2(t)$, correspond la sortie $s(t) = \lambda \cdot s_1(t) + \mu \cdot s_2(t)$, quelles que soient les excitations $e_1(t)$ et $e_2(t)$, et les scalaires réels λ et μ.
Le système est dit **invariant temporellement** ou stationnaire si, la réponse $s(t)$ correspondant à l'excitation $e(t)$, alors une excitation $e(t - \tau)$ entraîne une réponse $s(t - \tau)$.
Une manière de caractériser la réponse d'un système est **la relation temporelle entrée-sortie.**
C'est en général une équation différentielle vérifiée par $s(t)$ dans laquelle l'excitation $e(t)$ apparaît. Cette équation est linéaire et à coefficients constants.

On peut l'écrire $b_0 \cdot s(t) + \sum_k^n b_k \cdot \frac{\mathrm{d}^k s(t)}{\mathrm{d}t^k} = a_0 \cdot e(t) + \sum_k^m a_k \cdot \frac{\mathrm{d}^k e(t)}{\mathrm{d}t^k}$ où les coefficients a_k et b_k sont réels. L'ordre du système (et de l'équation) est le plus grand des entiers n et m.

Remarque

En pratique, on ne peut définir qu'un domaine de linéarité à l'intérieur duquel la propriété est vraie.

Dans le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, la solution $s(t)$ est la somme de deux termes :

- $s_{\mathrm{H}}(t)$ solution générale de l'équation homogène associée. Si $\lim_{t \to \infty} s_{\mathrm{H}}(t) = 0$ alors le système fonctionne de manière **stable** en régime linéaire ;
- $s_{\mathrm{P}}(t)$, une solution particulière de l'équation complète.

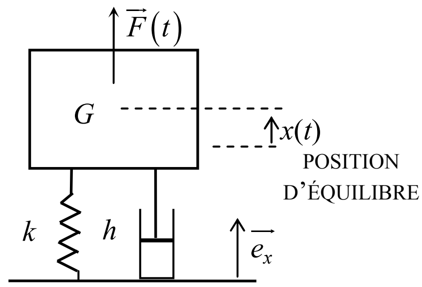
Si le système est stable en fonctionnement linéaire, le régime transitoire correspond à la durée où $s_{\mathrm{H}}(t)$ n'est pas nulle.
La solution obtenue contient des **constantes d'intégration** en nombre égal à l'ordre de l'équation. Il y a unicité des valeurs de ces constantes pour des **conditions initiales** données.

■ Exemples de systèmes linéaires

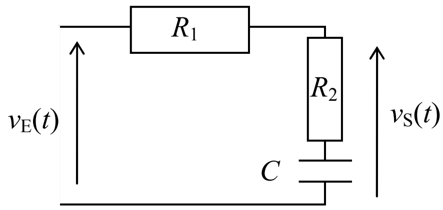
• Dispositif de suspension avec amortisseur

On montre la relation $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+h.\dfrac{dx(t)}{dt}+kx(t)=F(t)$.

On peut considérer que $x(t)$ est la réponse du système à l'entrée $F(t)$.



• Circuit électrique



En notant $\tau_1 = R_1C$ et $\tau_2 = R_2C$, on obtient :

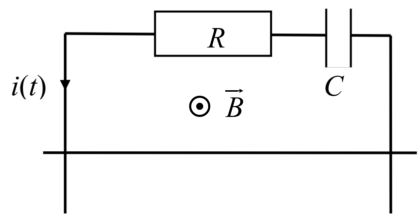
$$\left(1+\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\frac{dv_S(t)}{dt}+\frac{v_S(t)}{\tau_1}=\frac{\tau_2}{\tau_1}\frac{dv_E(t)}{dt}+\frac{v_E(t)}{\tau_1}.$$

On peut considérer que $v_S(t)$ est la réponse du système à l'entrée $v_E(t)$.

• Dispositif électromécanique : barre glissant dans un champ magnétique

On trouve $R\dfrac{di(t)}{dt}+\left(\dfrac{1}{C}+\dfrac{(B\ell)^2}{m}\right)i(t)=B\ell\cdot g$.

On peut considérer que $i(t)$ est la réponse du système à l'entrée constante B.



■ Caractérisation de la linéarité d'un système

Lorsque le fonctionnement linéaire du système est stable, le signal de sortie du système se réduit à la solution particulière de l'équation, **appelée régime établi.**
Lorsque le « deuxième membre » est une fonction sinusoïdale, la solution particulière est sinusoïdale de même pulsation.

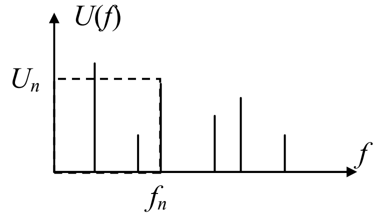
Conclusion

Un système linéaire, permanent et stable donne un signal de sortie purement sinusoïdal à partir d'un signal d'entrée purement sinusoïdal.
Si le signal de sortie d'un système dont l'entrée est purement sinusoïdale n'est pas purement sinusoïdal, alors le système ne fonctionne pas de manière linéaire.

On effectue **l'analyse spectrale** d'un signal $U(t)$ quelconque lorsqu'on détermine deux ensembles de valeurs $\{U_n\}$ et $\{\varphi_n\}$ telles que l'on peut écrire l'égalité :

$$U(t)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n\cos\left(2\pi f_n t+\varphi_n\right)$$

Pour chaque valeur f_n de la fréquence, on trace un trait proportionnel à l'amplitude U_n. On obtient ainsi un ensemble de **raies.** L'ensemble de ces raies forme le **spectre d'amplitude** du signal**.**
De même, on peut tracer le spectre de phase du signal.



Remarque

Si la valeur moyenne du signal n'est pas nulle, elle se traduit par une raie à la **fréquence nulle**. On l'appelle **composante continue** du signal.

Les spectres fréquentiels (en amplitude et en phase) constituent une autre image du signal que la représentation temporelle mais sont aussi utiles.

Joseph Fourier (1768-1830) a démontré que pour un signal périodique de période T_0 :

- le spectre d'amplitude est formé d'un ensemble **infini** et **discret** de raies d'amplitudes non-nulles ;
- à part une éventuelle composante continue, la fréquence la plus basse est celle du signal lui-même : $f_0 = 1/T_0$. On l'appelle **fondamental** ;
- les autres raies ont des fréquences multiples entiers de f_0 soit $f_n = nf_0$. La composante de fréquence f_n est appelée **harmoniques de rang *n***.

On a donc pour ces signaux $\boxed{U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)}$.

On peut aussi écrire la décomposition sous la forme équivalente suivante :

$$\boxed{U(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)}.$$

Dans ce cas, on a les relations suivantes établies par Fourier :

$$\boxed{U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)\mathrm{d}t \ ; \ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T U(t)\cos\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t \ ; \ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T U(t)\sin\left(n\omega_0 t\right)\mathrm{d}t}$$

Pour un signal périodique mais non purement sinusoïdal, les termes autres que le fondamental constitue donc un écart à la pureté sinusoïdale. On constitue la **distorsion harmonique**.

On appelle **taux de distorsion harmonique** $D = \dfrac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + ...}}{U_1}$.

C'est le rapport de la valeur efficace des termes harmoniques (fondamental et composante continue exclus) à celle du fondamental (composante continue et harmoniques exclues).
Pour un signal sinusoïdal pur, on obtient un taux de distorsion nul.
On peut aussi considérer la valeur en décibel $D_{\mathrm{dB}} = 20 \log(D)$.

■■ Méthodes

■ Comment calculer le spectre fréquentiel d'une fonction ?

❑ Méthode 1.1. Cas où la fonction est exprimée à l'aide de combinaisons de fonctions trigonométriques

On utilise les formules de linéarisation des puissances de sinus ou cosinus ou de leur produit jusqu'à obtenir une somme ne contenant que des sinus ou cosinus à la puissance 1.

➪ **Exercice 1.3**

Soit un additionneur présentant une non linéarité dont la relation entrée-sortie est :

$$v_S(t) = (v_{E1}(t) + v_{E2}(t)) + k\,(v_{E1}(t) + v_{E2}(t))^2.$$

Dans le cas où $v_{E1}(t)$ et $v_{E2}(t)$ sont purement sinusoïdaux de la forme $v_{E1}(t) = V_{10}\cos(\omega_1 t)$ et $v_{E2}(t) = V_{20}\cos(\omega_2 t)$ avec $\omega_1 > \omega_2$, on peut écrire :

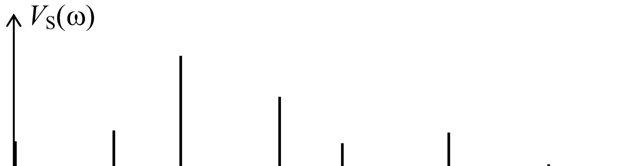
$$v_S(t) = V_{10}\cos(\omega_1 t) + V_{20}\cos(\omega_2 t) + k\frac{1}{2}V_{10}^2\left(1+\cos(2\omega_1 t)\right) + k\frac{1}{2}V_{20}^2\left(1+\cos(2\omega_2 t)\right) + \dots$$

$$\dots + 2k\,V_{10}\,V_{20}\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$$

soit $$v_S(t) = \frac{1}{2}k\left(V_{10}^2 + V_{20}^2\right) + V_{10}\cos(\omega_1 t) + V_{20}\cos(\omega_2 t) + \frac{1}{2}k\,V_{10}^2\cos(2\omega_1 t) + \dots$$

$$\dots\frac{1}{2}k\,V_{20}^2\cos(2\omega_2 t) + k\,V_{10}\,V_{20}\cos\left((\omega_1-\omega_2)t\right) + k\,V_{10}\,V_{20}\cos\left((\omega_1+\omega_2)t\right)$$

Le spectre de v_S est indiqué ci-contre.



La non linéarité du système entraîne **un enrichissement du spectre** (il existe des raies à des fréquences nouvelles par rapport aux spectres de v_{E1} et v_{E2}) :

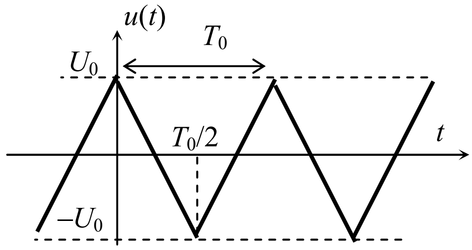
- la composante continue (de fréquence $\omega = 0$) correspond à la valeur moyenne non nulle de v_S. Les signaux d'entrée étant de valeur moyenne nulle, il s'est produit un **redressement partiel** ;
- il existe des raies de fréquences doubles de celles des raies du signal d'entrée : il s'est produit une **multiplication de fréquence** ;
- il existe des raies dont la fréquence est une combinaison linéaire des fréquences initiales (ici $\omega_2 - \omega_1$ et $\omega_1 + \omega_2$) : il s'est produit un **phénomène d'intermodulation**.

❑ Méthode 1.2. Cas où la fonction est périodique

On utilise les formules de Fourier pour calculer les coefficients de la décomposition en série.

⇨ Exercices 1.1 et 1.4

Soit le signal triangle symétrique $u(t)$ de période T_0 représenté ci-contre.



On cherche la décomposition de Fourier sous la forme : $u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_0 t)$.

- La valeur moyenne du signal est nulle donc $a_0 = 0$.
- Le signal est pair donc $b_n = 0$ quel que soit n.
- $a_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} u(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{2}{T_0}\left[\int_0^{T_0/2} (-4U_0\, t / T_0)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \int_{T_0/2}^{T_0} U_0\,(4t/T_0 - 3)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\right].$$

Une intégration par partie conduit, avec $\omega_0 T_0 = 2\pi$, à :

$$\int_0^{\frac{T_0}{2}}\left(-\frac{4U_0\, t}{T_0}\right)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \left(-\frac{4U_0}{T_0}\right)\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)^2\left(\cos(n\pi) - 1\right).$$

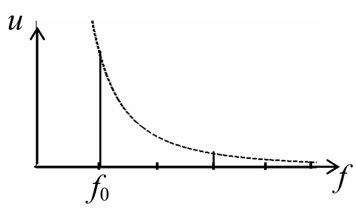
De même $\displaystyle\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}\left(\frac{4U_0\cdot t}{T_0}\right)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{4U_0}{T_0}\right)\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)^2\left(1 - \cos(n\pi)\right)$ et :

$$\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}(-3U_0)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = (-3U_0)\left(\frac{1}{n\omega_0}\right)\left(\sin(n\omega_0 T_0) - \sin(n\omega_0 T_0/2)\right) = 0.$$

On a donc $\begin{cases} a_n = 32\,U_0\left(\dfrac{1}{n\omega_0 T_0}\right)^2 \text{ si } n \text{ est impair} \\ a_n = 0 \text{ si } n \text{ est pair}\end{cases}$ et l'on peut écrire :

$$u(t) = (8U_0/\pi^2)\sum_{p=0}^{\infty}\left(1/(2p+1)^2\right)\cos\left((2p+1)\omega_0 t\right).$$

Le spectre est donc formé d'un fondamental de fréquences f_0 et ne contient que des harmoniques impaires de fréquences $f_{2p+1} = (2p+1)\,f_0$ avec des amplitudes décroissant comme l'inverse du carré du rang.



Méthodes

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	L'opération $s(t) = Ae_1(t) - Be_2(t)$ est linéaire.	☐	☐
2.	L'opération $s(t) = Ae(t - \tau)$ (où τ est une constante) est linéaire.	☐	☐
3.	L'opération $s(t) = Ae_1(t)\, e_2(t)$ est linéaire.	☐	☐
4.	La linéarité du fonctionnement d'un système dépend de l'amplitude du signal d'entrée.	☐	☐
5.	Le signal de sortie d'un système linéaire est toujours sinusoïdal.	☐	☐
6.	Le signal de sortie d'un système linéaire n'est jamais constant.	☐	☐
7.	La solution « particulière » d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants contient une ou plusieurs constantes d'intégration.	☐	☐
8.	Le nombre de constantes d'intégration dans la solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants est égal à l'ordre de cette équation.	☐	☐
9.	On détermine la linéarité du fonctionnement d'un système en examinant l'allure temporelle de la réponse à un signal d'entrée sinusoïdal.	☐	☐
10.	On ne peut faire la décomposition spectrale que d'un signal périodique.	☐	☐
11.	Les fréquences des composantes spectrales d'un signal sont séparées d'une même quantité.	☐	☐
12.	Les fréquences des composantes spectrales d'un signal périodique sont séparées d'une même quantité.	☐	☐
13.	Le fondamental d'un signal est la composante de fréquence la plus basse.	☐	☐
14.	Si la valeur moyenne d'un signal est non nulle, il y a une composante de fréquence nulle dans le spectre.	☐	☐
15.	Pour un signal périodique de période T_0, les pulsations des harmoniques sont $2\omega_0$, $3\omega_0$, $4\omega_0$ … avec $\omega_0 = 2\pi/T_0$.	☐	☐