Thème 1 - Logique

Dans cette section, les notations suivantes représentent pour :
- E : un ensemble ;
- P, Q, A et B : des assertions **[S1.1]**.

[S1.1] Assertion et quantificateurs

Une assertion (ou proposition) est une phrase mathématique à laquelle on peut associer une valeur « Vrai » ou « Faux ».
Une assertion peut dépendre de paramètres.
Notons x un élément de E, et $P(x)$ une assertion dépendant de x.

Si $P(x)$ est vraie ...,	on note ...	qui se lit ...
pour tous les éléments x de E	$\forall x \in E,\ P(x)$	pour tout x dans E, $P(x)$ est vraie.
pour un élément x de E	$\exists x \in E,\ P(x)$	il existe x dans E, tel que $P(x)$ est vraie.

✓ Attention : « il existe un élément » ne signifie pas « il existe un seul élément ». Si l'on veut signifier qu'il existe un unique élément vérifiant une assertion, on écrit « $\exists!$ ».
Pour ne pas l'oublier, je vous conseille de lire « il existe au moins un élément ».

✓ Le quantificateur $\forall$ se lit aussi « quel que soit ».

✓ L'emploi des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ en guise d'abréviations, dans une phrase en français, est exclu.

[S1.2] Définitions des connecteurs logiques

Les assertions « non P », « P et Q », « P ou Q », « $P \Rightarrow Q$ » et « $P \Leftrightarrow Q$ » sont définies à partir de P et Q, à l'aide des tables de vérités suivantes :

P	non P
V	F
F	V

P	Q	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

✓ Attention : la valeur de « $P \Rightarrow Q$ » est « Vrai », si P est fausse.
Ainsi, le seul cas de figure où il y a une erreur de raisonnement correspond à la deuxième ligne du tableau : si l'on déduit une assertion fausse d'une assertion vraie, c'est qu'on a fait une erreur de raisonnement c'est-à-dire

« $P \Rightarrow Q$ » est fausse.

✓ L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » exprime le fait que les assertions P et Q ont, toutes les deux, les mêmes valeurs de vérité.

✓ Les connecteurs logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ se lisent « implique » et « équivaut à ». Et, leur emploi en guise d'abréviations est exclu.

[S1.3] Quantificateurs et connecteurs logiques

Afin d'exprimer les négations d'assertions dépendant de paramètres, on utilise les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{c} \text{non } (\forall x \in E,\, P(x)) \Leftrightarrow \exists\, x \in E, \text{ non } (P(x))\,; \\ \text{non } (\exists\, x \in E,\, P(x)) \Leftrightarrow \forall\, x \in E, \text{ non } (P(x)). \end{array}$$

✓ La première équivalence formalise la notion de contre-exemple : si une assertion n'est pas vraie dans tous les cas, cela signifie qu'il existe (au moins) un cas (appelé contre-exemple) qui ne la vérifie pas.
Voici un moyen mnémotechnique pour la retenir :
« - Est ce que tous les poissons sont rouges ?
- Ah non ! Il y en a un (au moins) qui n'est pas rouge ! »

[S1.4] Propriétés des connecteurs logiques

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \text{non } (\text{non } P) & \Leftrightarrow & P \\ \text{non } (P \text{ et } Q) & \Leftrightarrow & ((\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)) \\ \text{non } (P \text{ ou } Q) & \Leftrightarrow & ((\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)) \\ \text{non } (P \Rightarrow Q) & \Leftrightarrow & (P \text{ et } (\text{non } Q)) \\ ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)) & \Leftrightarrow & (P \Leftrightarrow Q)\,. \end{array}$$

[S1.5] Définition de la contraposition

La contraposition de « $P \Rightarrow Q$ » est l'assertion « non $Q \Rightarrow$ non P », qui admet les mêmes valeurs de vérité que « $P \Rightarrow Q$ » :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P).$$

✓ Ainsi, on peut montrer que P implique Q, en montrant que non Q implique non P.

✓ Attention, il ne faut pas confondre la contraposition de « $P \Rightarrow Q$ » avec sa réciproque « $Q \Rightarrow P$ », qui n'a aucun lien de dépendance avec « $P \Rightarrow Q$ » : la réciproque peut être vraie ou fausse.
Si une implication et sa réciproque sont vraies toutes les deux, alors l'équivalence est vraie.

[S1.6] Raisonnement par récurrence simple

Soit H_n une assertion dépendant d'un entier n.
Si l'initialisation « H_0 est vraie » et si la propriété d'hérédité « $\forall n \in \mathbf{N}$, $H_n \Rightarrow H_{n+1}$ » est vraie, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie.

[S1.7] Raisonnement par récurrence double

Soit H_n une assertion dépendant d'un entier n.
Si l'initialisation « H_0 et H_1 sont vraies » et si la propriété d'hérédité « $\forall n \in \mathbf{N}$, $(H_n$ et $H_{n+1}) \Rightarrow H_{n+2}$ » est vraie, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est vraie.

[S1.8] Raisonnement par contraposition

Si « (non B) $\Rightarrow$ (non A) » est vraie, alors « $A \Rightarrow B$ » est vraie.

[S1.9] Raisonnement par l'absurde

Si l'assertion « non A » conduit à une assertion fausse, on dit qu'il s'agit d'une absurdité et alors A est vraie.

[S1.10] Raisonnement par disjonction de cas

Si « $A \Rightarrow B$ » et « (non A) $\Rightarrow B$ » sont vraies, alors B est (toujours) vraie.

✓ Ici, la disjonction de cas concerne deux cas : « A » et « non A ».
Ce type de raisonnement se généralise à plus de deux cas : dans la mesure où toutes les éventualités sont bien traitées et conduisent à l'assertion B ; alors B est vraie.

[S1.11] Raisonnement par analyse-synthèse

Si « $A \Rightarrow B$ » et « $B \Rightarrow A$ », alors « $A \Leftrightarrow B$ ».

✓ La première étape (montrer que $A \Rightarrow B$) est une phase de recherche, appelée « analyse », la seconde (montrer que $B \Rightarrow A$) est une phase de vérification, appelée « synthèse ».

Thème 2 - Ensembles - Applications

Dans cette section, les notations suivantes représentent pour :
• E, F et G : trois ensembles ;
• A et B : deux parties de E **[S2.1]** ;
• f : une application de E dans F **[S2.4]**.

[S2.1] Définitions d'une partie et de l'inclusion

A est un sous-ensemble (ou partie) de E si et seulement si : $\forall x \in A,\, x \in E$.

L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est une partie de E qui ne contient aucun élément : $\emptyset = \{\}$.

On a : ...	si et seulement si : ...	On le note ...
A est inclus dans B	$\forall x \in A,\, x \in B$.	$A \subset B$.
A est égal à B	$A \subset B$ et $B \subset A$.	$A = B$.

✓ Attention, ne pas confondre :
– « $\in$ » qui se lit « appartient » et qui se dit d'un élément dans un ensemble ;
– « $\subset$ » qui se lit « est inclus dans » et qui se dit d'une partie dans un ensemble.
Par exemple, on a :
– pour $X \in \{1\}$, alors X est un réel et vaut 1, donc on a : $X = 1$;
– pour $X \subset \{1\}$, alors X est un sous-ensemble de $\{1\}$, donc on a : $X = \emptyset$ ou $X = \{1\}$.

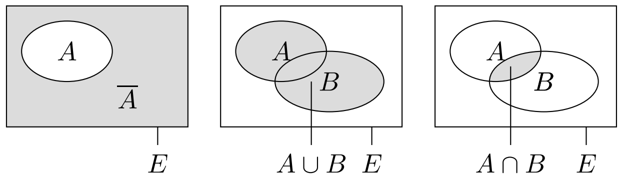
[S2.2] Définitions du complémentaire, de l'union, de l'intersection

La partie de E appelée...	et notée ...	est définie par : ...
complémentaire de A dans E	$\complement_E A$ ou $E \setminus A$ ou $\overline{A}$	$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$.
union de A et B	$A \cup B$	$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
intersection de A et B	$A \cap B$	$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.

✓ La notation $\overline{A}$ ne précise pas quel est l'ensemble E : lorsqu'on l'utilise, l'ensemble E paraît évident et on préfère alléger la notation.

✓ Le « ou » de l'union n'est pas exclusif.
Cela signifie que si un élément appartient à A et à B, il appartient aussi à A ou à B : $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.

✓ Ces parties sont illustrées par les croquis suivants :

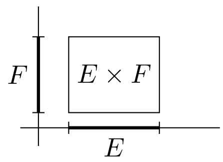


[S2.3] Définition du produit cartésien

Le produit cartésien de E et F est noté $E \times F$ et est défini par :

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E,\ y \in F\}\,.$$

✓ Cet ensemble peut être illustré par le croquis suivant :



✓ On peut définir le produit cartésien d'un nombre fini n d'ensembles à l'aide de n-uplets.

[S2.4] Définition de la composition

Soit E et F deux ensembles non vides, une application f de E dans F associe à tout élément x de E un unique élément de F, noté $f(x)$.

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La composée de f suivi de g est l'application notée $g \circ f$, qui se lit « g rond f », définie par :

$$g \circ f : E \to G : x \mapsto g\left(f(x)\right).$$

✓ Attention : la composition n'est pas commutative. Ceci signifie, que de manière générale (i.e. sauf cas particuliers), on a : $g \circ f \neq f \circ g$.

[S2.5] Sous-ensembles associés à une application

Le sous-ensemble appelé ...	et noté ...	est une partie de ...	et est défini par ...
graphe de f		$E \times F$	$\{(x,y) \in E \times F \mid x \in E,\ y = f(x)\}$.
image directe par f d'une partie A de E	$f(A)$	F	$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\} = \{f(x) \in F \mid x \in A\}$.
image réciproque par f d'une partie B de F	$f^{-1}(B)$	E	$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid \exists y \in B,\ y = f(x)\}$.

✓ L'image de f est $f(E) = \{f(x) \in F \mid x \in E\}$.

✓ Le graphe de f est souvent noté $\mathcal{C}_f$ pour la courbe représentative d'une fonction réelle à valeurs dans $\mathbf{R}$.

[S2.6] Applications associées à un sous-ensemble

L'application appelée ...	et notée ...	est définie de ...	par ...
fonction indicatrice de A	$\mathbb{1}_A$	$E \to \{0,1\}$	$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$
fonction identité de A	Id_A	$A \to A$	$\mathrm{Id}_A(x) = x$.
restriction de f à A	$f_{\|A}$	$A \to F$	$f_{\|A}(x) = f(x)$ pour $x \in A$.

[S2.7] Définitions d'une injection, surjection, bijection

On dit que :

f est une ...	si et seulement si ...
injection de E dans F	$\forall\,(x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$
surjection de E dans F	$\forall\,y \in F,\ \exists\ x \in E,\ f(x) = y.$
bijection de E dans F	$\forall\,y \in F,\ \exists!\ x \in E,\ f(x) = y.$
bijection de E dans F	f est une injection et une surjection.

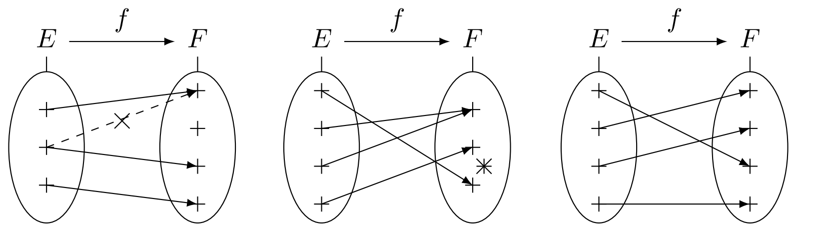
De plus, si f est une bijection, alors on peut lui associer une application appelée, application réciproque, notée f^{-1}, définie de F dans E et telle que :

$$\forall\,x \in E,\ f^{-1} \circ f(x) = x \text{ et } \forall\,y \in F,\ f \circ f^{-1}(y) = y.$$

✓ Autrement dit, f^{-1} vérifie : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

✓ Attention : la notation de l'image réciproque d'une partie **[S2.5]** peut être trompeuse. Elle ne signifie pas que f est bijective, et n'implique pas l'existence de f^{-1}.

✓ Les croquis suivants illustrent ces définitions :



injective	surjective	bijective
Deux éléments de E ne s'envoient pas sur le même élément de F.	Il n'y a pas d'élément de F sans antécédent.	À chaque élément de F correspond un unique élément de E.

[S2.8] Propriétés des injections, surjections, bijections

La composée de deux injections est une injection.
La composée de deux surjections est une surjection.
La composée de deux bijections f et g est une bijection. Et, dans ce cas, on a :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

[S2.9] Propriétés des ensembles finis

Un ensemble fini est un ensemble E qui contient un nombre fini d'éléments.
Son cardinal est le nombre d'éléments distincts qu'il contient et on le note : $\text{card}\,(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.

Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E :

- $\text{card}\,A = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$;
- $A \subset B \Rightarrow \text{card}\,(A) \leq \text{card}\,(B)$;
- $(A \subset B \text{ et } \text{card}\,(A) = \text{card}\,(B)) \Leftrightarrow A = B$.

✓ Soyez attentif à la notation $| \quad |$, elle se lit :
– « valeur absolue » pour un réel ;
– « module » pour un complexe ;
– « cardinal » pour un ensemble.

[S2.10] Relation entre les cardinaux de l'union et de l'intersection

Soit A et B deux parties d'un ensemble **fini** E, on a :

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B) - \text{card}\,(A \cap B).$$

En particulier, A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
Et, dans ce cas, on a :

$$\text{card}\,(A \cup B) = \text{card}\,(A) + \text{card}\,(B).$$

[S2.11] Applications entre deux ensembles finis de même cardinaux

Si E et F sont deux ensembles finis tels que $\#E = \#F$, alors, pour une application f de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est bijective ;
- f est injective ;
- f est surjective.

✓ Rappelons les fondamentaux **[S2.7]** :

« BIJECTIF = INJECTIF + SURJECTIF ».

✓ Attention à ne pas vous méprendre : le fait que les ensembles E et F aient le même nombre d'éléments est crucial ici.
– Dans le cas général, le fait qu'une application soit injective (ou surjective) n'implique pas que cette application soit bijective.
– Par contre, si vous savez que les deux ensembles de départ et d'arrivée sont de même cardinal, alors il suffira à f d'être injectif (ou surjectif) pour être également bijectif.