Chapitre 1

Second degré

Déjà 300 ans av. J.-C., Euclide était capable, par des méthodes géométriques, de résoudre des équations du second degré.
Puis Al-Khwarizmi, mathématicien du IXeme siècle, classait les équations du second degré en trois types différents. Il construisit, à partir de chaque type, un algorithme permettant de résoudre chaque type d'équations. Cependant, sa méthode était incomplète puisqu'elle ne permettait pas de trouver les solutions négatives (s'il y en avait).
Il fallut attendre le XVI^e siècle pour que les racines négatives ne soient plus ignorées.
C'est à partir du XVIII^e siècle que le symbolisme concernant les équations du second degré que nous connaissons aujourd'hui est apparu.

Je révise et je me perfectionne

I. Le trinôme $ax^2 + bx + c$

1) La forme développée

Définition d'un trinôme

Dire qu'une fonction f est *une fonction polynôme de degré 2* (ou *fonction trinôme*) signifie qu'il existe des nombres réels a ($a \neq 0$), b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Il s'agit de *la forme développée* de la fonction f.
Les nombres a, b et c sont *les coefficients* du trinôme.

Exemple 1.1

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2 - 4x + 3$ est une fonction trinôme.
En effet, elle est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = 3$.

Remarque 1.2

Il n'est pas interdit d'avoir $b = 0$ et/ou $c = 0$.
Ainsi, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x^2$ est une fonction trinôme avec $a = -4$, $b = 0$ et $c = 0$.

Exemple 1.3

Montrons que la fonction f définie par $f(x) = (x-1)^2 - x^2$ n'est pas une fonction du second degré.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 - x^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 - x^2 \\ &= -2x + 1. \end{aligned}$$

La fonction f n'est pas du second degré car $a = 0$ (ce qui, d'après la définition, est impossible).
Il s'agit en fait d'une fonction affine.

2) La forme canonique

Théorème 1.4

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
Alors f admet une écriture, dite *forme canonique*, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha).$$

Démonstration

On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \quad \text{car } a \neq 0 \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta.
\end{aligned}$$

avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$.
On retrouve aussi :

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= a(\alpha - \alpha)^2 + \beta \\
&= \beta.
\end{aligned}$$

Focus 1.5

Pour déterminer la forme canonique d'un trinôme, à partir de sa forme développée, on peut utiliser la formule ci-dessus, ou procéder de la manière suivante :

1. on factorise la forme développée par le coefficient a ;
2. on reconnait le début d'un carré, à l'aide de l'une des deux identités remarquables suivantes :
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{ou} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
3. on distribue uniquement le facteur a (factorisée en 1.).

Déterminons la forme cannique de la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 16x + 37$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. On a :
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 16x + 37 \\ &= 2\left(x^2 - 8x + \frac{37}{2}\right). \end{aligned}$$
2. On a :
$$x^2 - 8x + \frac{37}{2} = x^2 - 2 \times x \times 4 + \frac{37}{2}.$$
Or $x^2 - 2 \times x \times 4$ est le début de $(x-4)^2$.
En effet, on a :
$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 \iff x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16.$$
Ainsi, on a :
$$\begin{aligned} x^2 - 8x + \frac{37}{2} &= (x-4)^2 - 16 + \frac{37}{2} \\ &= (x-4)^2 + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$
3. Finalement, en distribuant, on a :
$$\begin{aligned} 2x^2 - 16x + 37 &= 2\left((x-4)^2 + \frac{5}{2}\right) \\ &= 2(x-4)^2 + 5. \end{aligned}$$

La forme canonique de la fonction f est donc :

$$f(x) = 2(x-4)^2 + 5.$$

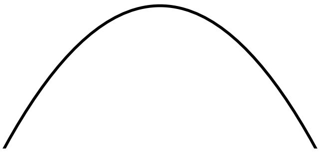
3) Courbe représentative

Proposition 1.6

La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole $\mathcal{P}$.

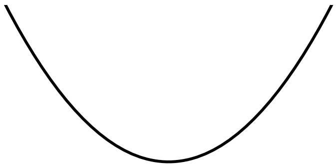
$a < 0$

La parabole est orientée vers le bas.



$a > 0$

La parabole est orientée vers le haut.



Proposition 1.7

Le sommet de la parabole, noté S, a pour coordonées $(\alpha; \beta)$
Cette parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = \alpha$ (droite verticale).

Focus 1.8

Pour déterminer les coordonnées du sommet d'une parabole associée à une fonction f de la forme $ax^2 + bx + c$, on pourra, appliquer les formules correspondantes à α et β (vues dans la forme canonique), ou procéder de la manière suivante :

1. On résout l'équation $f(x) = c$.
   On trouvera alors deux solutions (identiques ou différentes) x_1 et x_2 (dont l'une est 0).
2. On calcule $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ et $\beta = f(\alpha)$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$.

Cette fonction f étant un trinôme, sa courbe représentative est donc une parabole.
Déterminons les coordonnées du sommet de la parabole.

1. On résout $f(x) = -3$:
   On a :
   $$\begin{aligned} f(x) = -3 &\iff 2x^2 + 8x - 3 = -3 \\ &\iff 2x^2 + 8x = 0 \\ &\iff x(2x+8) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 8 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -4. \end{aligned}$$
   Les solutions de l'équation $f(x) = -3$ sont -4 et 0.
2. On a :
   $$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-4+0}{2} \\ &= -2. \end{aligned}$$
   De plus, on a :
   $$\begin{aligned} \beta &= f(\alpha) \\ &= 2 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) - 3 \\ &= -11. \end{aligned}$$
   Finalement, les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f sont $(-2; -11)$.

Remarque 1.9

De même, en utilisant les formules donnant α et β, on va retrouver les mêmes résultats.
On a :
$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{8}{2 \times 2} \\ &= -\frac{8}{4} \\ &= -2. \end{aligned}$$
Le calcul de β est le même que précédemment.

4) Variations

Proposition 1.10

On considère un trinôme f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$:

- Si $a < 0$, β est le maximum de la fonction atteint pour $x = \alpha$.
  Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Var f		$\nearrow$	β	$\searrow$	

- Si $a > 0$, β est le minimum de la fonction atteint pour $x = \alpha$.
  Le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Var f		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Démonstration

On rappelle que toute fonction trinôme admet une écriture de la forme :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

On introduit les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = x - \alpha \qquad h(x) = x^2 \qquad i(x) = ax + \beta$$

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a le schéma suivant :

$$x \longmapsto x - \alpha \longmapsto (x - \alpha)^2 \longmapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$$

On distingue alors deux cas :

○ $\underline{a > 0}$

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels de l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ tels que $x_1 < x_2$.
On a :

$$x_1 < x_2 \iff x_1 - \alpha < x_2 - \alpha.$$

Comme $x_1 \in]-\infty;\alpha]$, on a $x_1 - \alpha \leq 0$.
De même, on a $x_2 - \alpha \leq 0$.
La fonction h étant strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$, on a :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\iff x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \\ &\iff (x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2 . \end{aligned}$$

De plus, comme $a > 0$, la fonction affine i est stristement croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\iff (x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2 \\ &\iff a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta \\ &\iff f(x_1) > f(x_2) . \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $]-\infty;\alpha]$ si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) > f(x_2)$.
Finalement, la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$.
Soient x_1 et x_2 deux nombres réels de l'intervalle $[\alpha;+\infty[$ tels que $x_1 < x_2$.
On a :

$$x_1 < x_2 \iff x_1 - \alpha < x_2 - \alpha.$$

Comme $x_1 \in [\alpha;+\infty[$, on a $x_1 - \alpha \geq 0$.
De même, on a $x_2 - \alpha \geq 0$.
La fonction h étant strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\iff x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \\ &\iff (x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2 . \end{aligned}$$

De plus, comme $a > 0$, la fonction affine i est stristement croissante sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\iff (x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2 \\ &\iff a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta \\ &\iff f(x_1) < f(x_2) . \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $[\alpha;+\infty[$ si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) < f(x_2)$.
Finalement, la fonction f est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

∘ $\underline{a < 0}$

Dans ce cas, la fonction i est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
De la même manière que pour $a > 0$, on peut démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strcitement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

Exemple 1.11

On considère la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 - x + 3$.
Déterminons le tableau de variation de cette fonction.
On a vu, dans le Focus précédent, que $\alpha = -2$ et $\beta = -11$.