LE SECOND DEGRÉ

Chapitre 1

Les fonctions polynômes du second degré − définies par des formules de la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ où a, b et c sont trois réels (a non nul) − font partie du catalogue des fonctions de référence étudiées en classe de 2nde. Dans ce chapitre, nous allons automatiser et approfondir la résolution d'équations et d'inéquations ainsi que le tracé des paraboles ; sans oublier quelques friandises…

I) Une transformation incontournable : la forme canonique

L'écriture sous la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ est certes la plus simple mais elle n'est généralement pas bien adaptée à la résolution d'équations ou d'inéquations.

L'outil de base pour la résolution d'équations (ou d'inéquations) de degré 2 (ou supérieur à 2) est la **factorisation**.

Ainsi :

- Pour résoudre $4x^2-1=0$: on factorise en $(2x+1)(2x-1)=0$ puis on annule chaque facteur pour trouver $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$. Fastoche.
- Pour résoudre $3x^2+2x=0$: on factorise en $x(3x+2)=0$ et, comme précédemment, on trouve $S=\left\{0;-\frac{2}{3}\right\}$. Fastoche itou.

- Pour résoudre $x^2+2x-3=0$… Factorisation ? On bloque : aucune des stratégies étudiées en seconde ne fonctionne.

Dans la pratique, si aucun des deux coefficients b ou c n'est nul, les méthodes traditionnelles de factorisation échouent.
Nous allons donc être contraints de trouver une nouvelle stratégie de factorisation, spécifique aux expressions du second degré.

Reprenons $f(x)=x^2+2x-3$.

L'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ permet de factoriser de nombreuses expressions : on va donc tenter d'exprimer $f(x)$ comme une différence de deux carrés.
On regroupe les deux premiers termes (ceux qui contiennent l'inconnue x) et on écrit $x^2+2x=\left(x+1\right)^2-1$.

Vérification : on développe $(x+1)^2-1=\left(x^2+2x+1\right)-1=x^2+2x$.

Dit autrement, x^2+2x est le début du développement du carré $(x+1)^2$ (le terme $2x$ en étant le double produit). Et comme $(x+1)^2=\boxed{x^2+2x}+1$, on a bien $\boxed{x^2+2x}=\left(x+1\right)^2-1$.

Je vois quelques froncements de sourcils… Et j'entends certains penser, à juste titre : « Mais on aurait aussi bien pu écrire $x^2+2x=\left(x+2\right)^2-2x-4$ ou encore $x^2+2x=\left(x-1\right)^2+4x-1$, ou… ».

Certes, mais l'intérêt du choix de $(x+1)^2$ est que le développement de ce carré ne **diffère de** x^2+2x **que d'une constante**. Et c'est le seul carré qui possède cette propriété.

Plus généralement x^2+bx (où b est un réel quelconque) est **le début** du développement du carré $\left(x+\frac{1}{2}b\right)^2$ puisque, en développant, on obtient

$$\left(x+\frac{1}{2}b\right)^2 = x^2+2\times x\times\left(\frac{1}{2}b\right)+\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \boxed{x^2+bx}+\frac{b^2}{4}.$$

Constante réelle.

Revenons à notre expression initiale :

$$f(x)=\boxed{x^2+2x}-3=\left(\left(x+1\right)^2-1\right)-3=\left(x+1\right)^2-4.$$

Différence de deux carrés

Factorisation possible

Et voilà !

L'écriture de $f(x)$ sous la forme $f(x)=(x+1)^2-4$ est **l'écriture canonique de $f(x)$. Elle prépare à une factorisation (éventuelle).**

D'autres exemples :

➲ $\boxed{x^2+x}-2=\boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}-2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$

Différence de deux carrés donc factorisable.

L'expression $x^2+\boxed{1}x$ est le début du développement du carré $\left(x+\frac{\boxed{1}}{2}\right)^2$.

Comme $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+2\times\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}$, on a bien $x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

➲ $\boxed{x^2-3x}+4=\boxed{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}.$

Somme de deux carrés donc **non** factorisable.

Ben oui, $\frac{7}{4}$ est le carré de $\sqrt{\frac{7}{4}}$!

L'expression $x^2-\boxed{3}x$ est le début du développement du carré $\left(x-\frac{\boxed{3}}{2}\right)^2$.

➲ $g(x)=2x^2+5x-7$: nouveauté avec ce 2 devant le x^2 !

Ici, le coefficient de x^2 est ici $a=2$ alors que, dans tous les exemples précédents, on avait $a=1$.

On se ramène à un problème que l'on sait résoudre en écrivant $g(x)=2\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{7}{2}\right)$ (on met le coefficient a en facteur). L'expression entre parenthèses est maintenant du même type que les exemples précédents. On écrit alors $g(x)=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}-\frac{7}{2}\right)=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\right)$.

C'est la moitié de $\frac{5}{2}$.

C'est le carré de $\frac{5}{4}$.

La forme canonique obtenue est de la forme $a\times(\text{différence de deux carrés})$.

Elle est donc facilement factorisable.

➲ $m(x)=-3x^2+x-1$: même stratégie que dans l'exemple précédent.

On obtient $a\times(\text{somme de deux carrés})$.

$$m(x)=-3\left(\boxed{x^2-\frac{1}{3}x}+\frac{1}{3}\right)=-3\left(\boxed{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}}+\frac{1}{3}\right)=-3\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}\right).$$

Attention aux signes ! C'est toujours pareil !

On choisit $\frac{1}{6}$ parce que c'est la moitié de $\frac{1}{3}$ et on soustrait le terme « parasite » $\frac{1}{36}$ qui est le carré de $\frac{1}{6}$ que l'on aurait obtenu en développant l'identité remarquable $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2$.

Récapitulons.

Pour trouver la forme canonique de l'expression $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$:

- **On met a en facteur commun** (quitte à faire apparaître des fractions) :

  $f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

- **On regroupe les deux termes contenant l'inconnue** et on les identifie au début du développement d'un carré : $x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-.....$

La moitié !

- **On soustrait le terme « parasite »** : puisque $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}$,

  Le carré !

  on a $x^2+\dfrac{b}{a}x = \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}$.

- On obtient alors la **forme canonique** cherchée :

$$f(x)=a\left(\boxed{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right)$$ soit enfin

$$f(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right).$$

Fort heureusement, **les formules précédentes ne sont pas à mémoriser !**

Il est impératif, en revanche, **de retenir la méthode**.

Pour vous entraîner, rien de tel qu'une feuille de papier blanche, livre fermé.

Et quelques énoncés pour lesquels il s'agit de trouver les formes canoniques.

Les réponses sont à la fin du chapitre, pour éviter les tentations…

$f(x)=x^2-4x-7$	$g(x)=-3x^2+x$
$h(x)=x^2+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3}$	$i(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+1$
$j(x)=\dfrac{2}{3}x^2+x$	$k(x)=(3x-1)(2+x)$
$\ell(t)=-5t^2-t+4$	$m(t)=4{,}9t^2+3t-0{,}1$
$n(x)=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{2}{5}x-\dfrac{3}{5}$	$p(s)=0{,}01s^2-0{,}1s$

Application 1 : factorisation (éventuelle) d'une expression du second degré

Nous avons constaté, sur les exemples précédents, que la forme canonique de $f(x)=ax^2+bx+c$ s'écrivait :

- soit comme une **différence** de deux carrés, de **factorisation immédiate** grâce à l'identité $\mathcal{A}^2-\mathcal{B}^2=(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathcal{A}-\mathcal{B})$;

- soit comme une **somme** de deux carrés. dont la **factorisation est impossible**.

Ainsi :

Différence : factorisable.

➲ $x^2+2x-3=(x+1)^2\boxed{-}4=(x+1)^2-2^2=(x+1+2)(x+1-2)=(x+3)(x-1)$.

➲ $x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\boxed{-}\frac{5}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

➲ $x^2-3x+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\boxed{+}\frac{7}{4}$ n'est pas factorisable

Somme : pas factorisable.

➲ $2x^2+5x-7=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2\boxed{-}\left(\frac{9}{4}\right)^2\right)=2\left(x+\frac{7}{2}\right)(x-1)$.

➲ $-3x^2+x-1=-3\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2\boxed{+}\frac{11}{36}\right)$ n'est pas factorisable.

Application 2 : résolution des équations du second degré

Vous le savez : la factorisation est l'outil majeur du calcul littéral. Il permet entre autres, de résoudre équations et inéquations. Or, depuis le paragraphe précédent, nous savons factoriser une expression du second degré (si c'est possible !). La résolution des équations du second degré devient maintenant un jeu d'enfants…

Si la forme canonique de ax^2+bx+c s'écrit comme une **différence** de deux carrés, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet **deux solutions**.

On les obtient en annulant chacun des deux facteurs de la factorisation.

Si la forme canonique de ax^2+bx+c s'écrit comme une **somme** de deux carrés, alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet **pas de solution**.

Une somme de deux carrés ne peut jamais valoir 0 (sauf si c'est $0+0$).

On pourrait se contenter des lignes précédentes, mais il faut bien reconnaître qu'il est un peu frustrant, dans le cas où une équation admet deux solutions, de ne pas obtenir les formes explicites de ces solutions, non ?

Deux questions doivent alors être posées :

1. Comment détecter qu'une équation du second degré admet, ou pas, des solutions ?

2. Si solutions il y a, quelles sont-elles ?

Pour répondre à la première question, on revient à l'écriture générale de la forme canonique $f(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$. *A priori*, plutôt beurk.

Attention à ne pas tomber dans le panneau consistant à croire que cette expression est **toujours** une différence de deux carrés ! Bien sûr, je vois, comme vous, le signe « – » ! Je vois aussi que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et $4a^2$ sont des carrés… Mais que dire du numérateur b^2-4ac ? Positif ou négatif ?

C'est donc le signe de b^2-4ac qui va permettre de distinguer (ou discriminer) les deux cas rencontrés depuis le début de ce chapitre : différence ou somme de deux carrés.

Ce nombre joue un rôle central dans la factorisation, la résolution des équations et des inéquations du second degré. Il s'appelle **le discriminant** et on le note traditionnellement Δ.

delta

Nom plutôt bien choisi si l'on considère son rôle !

Le discriminant de l'expression $f(x)=ax^2+bx+c$ est $\Delta=b^2-4ac$.

On écrit maintenant $f(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

La situation est claire :

- si $\Delta \geq 0$, on peut écrire $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ et $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$

  est une différence de deux carrés,
- si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est une somme de deux carrés.

Voilà. La discrimination (vous préférez distinction ?) entre les deux cas est maintenant bien établie et on peut énoncer de belles formules.

Le cas le plus simple, c'est celui où $\Delta < 0$: pas de factorisation possible de $f(x)$, pas de solution pour l'équation $f(x) = 0$.

Si $\Delta \geq 0$, on factorise $f(x)$ en utilisant l'identité remarquable ad hoc et on trouve $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

Ce que l'on préfère écrire $f(x) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ faisant ainsi apparaître les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$: $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Ouf, on y est ! Résumons et… mémorisons.

Le **discriminant** de l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta < 0$, $f(x)$ n'est pas factorisable, comme somme de deux carrés et l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution : $S = \varnothing$.

Si $\Delta \geq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a pour ensemble de solutions $S = \left\{x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ et $f(x) = a(x - x')(x - x'')$.