DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

Chapitre 1

• Si vous êtes sur le premier barreau d'une échelle et que vous savez comment passer d'un barreau à l'autre, on peut affirmer que vous serez capable de monter tout en haut de l'échelle, non ?

• Vous avez déjà vu ce jeu où l'on dispose des dominos verticalement de façon que la chute de l'un d'entre eux entraîne nécessairement la chute du suivant. Si vous faites tomber l'un des dominos, alors vous pourrez être certain que tous les dominos suivants vont tomber, non ?

Dans ces deux situations, la clé du succès réside dans **la certitude de pouvoir passer d'une étape à l'autre**. Cette certitude est également au cœur du principe de la démonstration par récurrence.

Le mot « récurrence » a été introduit en classe de 1re pour qualifier une méthode permettant de calculer, pas à pas, les termes successifs d'une suite numérique.

Rappelez-vous : le premier terme est donné ainsi que **la relation qui permet de passer d'un terme au terme suivant**. Les termes de la suite se calculent alors, l'un après l'autre.

Par exemple $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \boxed{u_{n+1} = 2u_n - 1} \end{cases}$ définit la suite des termes :

avec $n = 0$: $u_1 = u_{0+1} = 2u_0 + 1 = 2(-2) + 1 = -3$;

avec $n = 1$: $u_2 = u_{1+1} = 2u_1 + 1 = 2(-3) + 1 = -5$;

avec $n = 2$: $u_3 = u_{2+1} = 2u_2 + 1 = 2(-5) + 1 = -9$;

avec $n = 3$: $u_4 = u_{3+1} = 2u_3 + 1 = 2(-9) + 1 = -17$; etc.

Cette relation (dans notre exemple $u_{n+1} = 2u_n - 1$), dite **relation de récurrence**, permet de calculer tous les termes de la suite. Calcul possible mais très laborieux, puisqu'il avance... au pas ! Le calcul de u_{75}, par exemple, n'est envisageable qu'avec l'aide d'un algorithme ou bien... d'une formule explicite déduite de la relation de récurrence (pas toujours facile à trouver). Voir le chapitre suivant concernant les suites numériques.

Voyons quelques exemples de démonstrations par récurrence.

➊ On souhaite démontrer que, quelque soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, $9^n - 1$ est un multiple de 8.

Les multiples de 8 s'écrivent sous la forme $8k$ où $k \in \mathbb{Z}$

On peut **commencer par vérifier** que $9^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, $9^1 - 1 = 8$, $9^2 - 1 = 80$, $9^3 - 1 = 728$ ... sont bien des multiples de 8.

$0 = 8 \times 0$

$728 = 8 \times 91$

Mais les exemples ne suffiront pas, quelque soit leur nombre, à prouver la propriété demandée, on le sait bien.

Essayons de mettre en place la stratégie ébauchée précédemment en démontrant que, **si** $9^p - 1$ est un multiple de 8, où p est un entier quelconque, fixé, **alors** $9^{p+1} - 1$ sera, lui aussi, un multiple de 8.

Passage de l'étape p à l'étape suivante $p+1$

Admettons donc que $9^p - 1 = 8k$ soit $9^p = 8k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ce $k \in \mathbb{Z}$ est indispensable ! Sinon, n'importe quel nombre est multiple de n'importe quel autre... Par exemple, $4 = 3 \times \underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)}_{\notin \mathbb{Z}}$ prouverait que 4 est un multiple de 3... C'est n'importe quoi !

$a^{p+1} = a \times a^p$

C'est l'hypothèse faite ci-dessus

Alors $9^{p+1} - 1 = 9 \times \left(9^p\right) - 1 = 9 \times \left(8k + 1\right) - 1 = 9\left(8k\right) + 9 - 1 = 8\left(9k\right) + 8 = 8\left(\underbrace{9k + 1}_{\in \mathbb{Z}}\right)$

est bien, lui aussi, un multiple de 8...

On vient de démontrer que **l'on peut toujours passer de l'étape p à l'étape $p+1$.** Et alors ? Et alors, inutile de continuer nos vérifications ! Puisque $9^3 - 1$ est un multiple de 8, $9^{3+1} - 1$ en est également un. Et ainsi de suite, éternellement ! **Conclusion** : $9^n - 1$ est **toujours** un multiple de 8.

Démonstration dont la forme, entièrement nouvelle, peut surprendre mais dont la simplicité et la puissance sont bluffantes. Avec un peu d 'entraînement, nous disposerons d'un outil irremplaçable pour les démonstrations faisant intervenir des **variables entières**. Continuons l'exploration, la mise en forme suivra.

❷ On veut prouver l'égalité $\mathcal{P}(n) :\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

pour tout entier naturel n non nul.

Traditionnellement, pour démontrer une égalité, on part d'un membre et on le transforme pour obtenir le second. Ici, le membre de gauche est une somme de n termes, qu'il semble impossible de transformer. Essayons donc la récurrence.

On s'assure que la formule est vraie pour les premières valeurs de n :

- pour $n=1$ on a bien $1^2=\dfrac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$; $\boxed{1=\dfrac{1\times2\times3}{6}}$
- pour $n=2$ on a bien $1^2+2^2=\dfrac{2(2+1)(2\times2+1)}{6}$; $\boxed{5=\dfrac{2\times3\times5}{6}}$
- pour $n=3$ on a bien $1^2+2^2+3^2=\dfrac{3(3+1)(2\times3+1)}{6}$; $\boxed{14=\dfrac{3\times4\times7}{6}}$ etc.

Ça démarre bien...

Attention ! À chaque étape la somme contient un terme de plus...

Admettons maintenant que $\mathcal{P}(p) : 1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2=\dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$

est vraie pour un entier fixé p.

Il s'agit de **démontrer que cette égalité reste vraie au rang** $p+1$.

Ne confondez pas tout !

- Dans une égalité, comme par exemple $(n+1)^2=n^2+2n+1$, il est possible de remplacer la variable n par $n+1$ pour obtenir $(n+2)^2=(n+1)^2+2(n+1)+1$.

En effet, **l'égalité** $(n+1)^2=n^2+2n+1$ **est vraie quelle que soit la valeur de** n...

- Ici, l'égalité $1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2=\dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ n'est **vraie que pour la valeur fixée p,** qui n'est pas une variable mais...plutôt une constante ! Pas question donc de remplacer p directement par $p+1$ pour obtenir ce que l'on souhaite. OK ?

Démontrer que la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie revient à prouver que

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(p+1)^2=\frac{(p+1)\left[(p+1)+1\right]\left[2(p+1)+1\right]}{6}$$
$$=\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} \quad ?$$

Sans l'hypothèse que $\mathcal{P}(p)$ est vraie, la démonstration de cette égalité est plus compliquée que celle de l'égalité initiale demandée ! N'oubliez pas que, pour démontrer qu'il est possible de passer de l'étape p à l'étape $p+1$, on **admet que l'étape p est réalisée** (par exemple, vous êtes déjà sur le 4ème barreau de l'échelle, ou bien le domino n°17 tombe).

Calculons donc $1^2+2^2+3^2+\cdots+(p+1)^2$ en utilisant $\mathcal{P}(p)$.

On écrit $1^2+2^2+3^2+\cdots+(p+1)^2=\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+p^2\right]+(p+1)^2$

$$\overset{\mathcal{P}(p)}{=}\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2.$$

Voilà. Le plus dur est fait puisqu'il ne reste plus, maintenant, qu'à vérifier que $\dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2=\dfrac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$.

Il suffit de développer les deux membres pour constater leur égalité :

$$\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2=\frac{(p+1)\left[p(2p+1)+6(p+1)\right]}{6}=\frac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}$$

et $\dfrac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}=\dfrac{(p+1)(2p^2+7p+6)}{6}$.

Conclusion : si la formule est vraie pour la valeur entière p, elle est également vraie pour l'entier suivant $p+1$.

Comme elle est vraie pour $p=1$, elle est vraie pour $p=2$, puis pour $p=3$ et ainsi de suite : la formule demandée est bien vraie pour tout entier n.

D'autres exemples seront traités après la mise en forme qui suit.

Mise en forme du principe de la démonstration par récurrence

On veut démontrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$, où n est un entier naturel, est **vraie pour tout entier** $n \geq 0$.
On procède en deux temps :
Temps 1 : **on vérifie** que $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie. Si ce n'est pas le cas, on peut s'arrêter puisqu'on a trouvé un contre-exemple : $\mathcal{P}(0)$ est fausse et donc $\mathcal{P}(n)$ n'est pas vraie pour tout entier $n \geq 0$. Stop.
Temps 2 : on suppose que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour **un entier fixé** p. Cette supposition a du sens puisqu'on vient de vérifier que $p = 0$ est une valeur possible de p.
On démontre alors que $\mathcal{P}(p+1)$ est également **vraie.** Pour cette démonstration, on utilise impérativement l'hypothèse que $\mathcal{P}(p)$ est vraie.
Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est bien vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Vocabulaire

Temps 1 : **initialisation** (on initialise la démonstration avec la première valeur entière de la variable).

Temps 2 : **hérédité** (la propriété $\mathcal{P}(p+1)$ hérite sa véracité de la propriété $\mathcal{P}(p)$).

Remarques

1. Certains énoncés demandent de démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie **à partir d'une certaine valeur** n_0 entière. Pour l'initialisation, on **vérifie** simplement que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

2. Cette méthode de démonstration ne peut être mise en œuvre que pour des propriétés qui font intervenir des **variables entières** puisque seuls les **nombres entiers ont un suivant**.
Passant d'un nombre à son suivant, grâce à l'hérédité, on est bien certain de balayer tous les entiers possibles.

Exemples rédigés

❶ La suite u est définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n - \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Démontrer que, **pour tout entier** n, $u_n \leq \dfrac{2}{3}$.

On note $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leq \dfrac{2}{3}$.

Initialisation : a-t-on $\mathcal{P}(0)$, soit $u_0 \leq \dfrac{2}{3}$? Oui puisque $u_0 = 0$.

Hérédité : on suppose que $\mathcal{P}(p)$ est vraie **pour un entier** p fixé.

On a donc $u_p \leq \dfrac{2}{3}$; il faut prouver qu'alors $\mathcal{P}(p+1)$ est également vraie, soit $u_{p+1} \leq \dfrac{2}{3}$, donc que $3u_p - \dfrac{4}{3} \leq \dfrac{2}{3}$?

Or grâce à $\mathcal{P}(p)$, $3u_p - \dfrac{4}{3} \leq 3 \times \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{3} \leq 2 - \dfrac{4}{3} \leq \dfrac{2}{3}$,ce qui prouve $\mathcal{P}(p+1)$.

Conclusion : pour tout entier n, $u_n \leq \dfrac{2}{3}$. Plutôt facile, non ?

❷ La fonction f est supposée dérivable, de fonction dérivée f'.

On souhaite démontrer la formule $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$ pour $n \geq 1$.

Fonction dérivée de la fonction f^n

$f^n = \underbrace{f \times f \times \cdots \times f}_{n \text{ fois}}$

Exemple : si $f(x) = (3x^2 - 1)^4$, $f = g^4$ avec $g(x) = 3x^2 - 1$.

On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $(f^n)' = n \times f^{n-1} \times f'$ ».

On doit démontrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie **pour tout entier** $n \geq 1$.

Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(1)$ est vraie : $(f^1)' = 1 \times f^0 \times f'$ puisque $f^1 = f$ et $f^0 = 1$ (fonction constante égale à 1).

Hérédité : on suppose que $\mathcal{P}(p)$ est vraie **pour un entier fixé** p.

Alors $\left(f^{p}\right)' = p \times f^{p-1} \times f'$. On doit prouver que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, soit $\left(f^{p+1}\right)' = (p+1) \times f^{p} \times f'$?

Puisque $f^{p+1} = f^{p} \times f$, la dérivée de f^{p+1} s'obtient en dérivant le **produit de deux fonctions**.

On se souvient que $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

Alors $\left(f^{p+1}\right)' = \left(f^{p}\right)' \times f + f^{p} \times f'$ ce qui donne, en utilisant $\mathcal{P}(p)$,

$$\left(f^{p+1}\right)' = \left[p \times f^{p-1} \times f'\right] \times f + f^{p} \times f' = p \times f^{p} \times f' + f^{p} \times f'$$

$$= (p+1) f^{p} \times f'.$$ Yes !

$\mathcal{P}(p)$

$f^{p-1} \times f = f^{p}$

Grâce à $\mathcal{P}(p)$, $\mathcal{P}(p+1)$ est donc vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, $\left(f^{n}\right)' = n \times f^{n-1} \times f'$.

Exemple : avec $f(x) = \left(3x^{2} - 1\right)^{4}$, on trouve $f'(x) = 4\left(3x^{2} - 1\right)^{3} \times 6x = 24x\left(3x^{2} - 1\right)^{3}$

Dérivée de $x \mapsto 3x^{2} - 1$

❸ $\mathcal{E}$ est un ensemble comportant n éléments. On souhaite prouver que $\operatorname{Card}\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 2^{n}$, c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ admet 2^{n} sous-ensembles.

Card : cardinal d'un ensemble fini = nombre de ses éléments

$\mathcal{P}(\mathcal{E})$: ensemble des parties (sous-ensembles) de $\mathcal{E}$.

On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\operatorname{Card}\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 2^{\operatorname{Card}\mathcal{E}}$.

Exemples • si $\mathcal{E} = \{a\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \{\varnothing, \{a\}\}$. Quand $n = 1$, $\operatorname{Card}\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 2^{1} = 2$.

• si $\mathcal{E} = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Quand $n = 2$, $\operatorname{Card}\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 2^{2} = 4$.

• si $\mathcal{E} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Quand $n = 3$, $\mathrm{Card}\,\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 2^3 = 8$. OK ?

Initialisation : les exemples précédents suffisent amplement (le premier exemple suffit).

Hérédité : supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie : **tout ensemble de cardinal p admet** 2^p **sous-ensembles, où p est un entier fixé**.

Hypothèse

Il faut prouver $\mathcal{P}(p+1)$: si $\mathcal{E}$ comporte $p+1$ éléments, il admet 2^{p+1} sous-ensembles ?

Pour utiliser l'hypothèse $\mathcal{P}(p)$, il faut exhiber, à partir de $\mathcal{E}$, un ensemble à p éléments : pour cela, on choisit un élément quelconque c de $\mathcal{E}$ et on note $\mathcal{F}$ l'ensemble formé des p éléments restants.

On distingue alors deux catégories de sous-ensembles de $\mathcal{E}$:

• Ceux qui ne contiennent pas c : ce sont les sous-ensembles de $\mathcal{F}$, et, puisque $\mathrm{Card}\,\mathcal{F} = p$, il y a en a 2^p d'après l'hypothèse $\mathcal{P}(p)$.

• Ceux qui contiennent c : on les obtient **en adjoignant c à chacun des** 2^p **sous-ensembles précédents**. Il y en a encore 2^p.

Pour bien comprendre, étudiez le passage de $n = 2$ à $n = 3$:

$$\mathcal{E} = \{a,b,c\} = \{a,b\} \cup \{c\} = \mathcal{F} \cup \{c\}$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \left\{ \underbrace{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}}_{\mathcal{P}(\mathcal{F})}, \underbrace{\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}}_{\text{On adjoint } c \text{ aux 4 précédents}} \right\}.$$

$\mathcal{E}$ admet donc $2^p + 2^p$ sous-ensembles, soit 2^{p+1} : $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

$$\boxed{2^p + 2^p = 2 \times 2^p = 2^{p+1}}$$

Conclusion : $\mathrm{Card}\,\mathcal{P}(\mathcal{E}) = 2^{\mathrm{Card}\,\mathcal{E}}$. Belle formule...

D'autres nombreux exemples seront traités dans la suite du cours, tout particulièrement dans les chapitres qui utilisent des nombres entiers : suites numériques et dénombrement.