Problème 1

Le paradoxe de Banach-Tarski-Hausdorff

1.1 Énoncé

Thème

L'objet principal de ce problème est de mettre en évidence un paradoxe lié à l'acceptation de l'axiome du choix.

Rappelons que cet axiome du choix peut s'énoncer ainsi : « Pour toute famille $(E_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides, il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments telle que pour tout i dans I on ait $x_i \in I$ » en d'autres termes on peut simultanément choisir un élément dans chaque ensemble. On peut aussi l'énoncer sous la forme équivalente : « Tout produit d'ensembles non vides est non vide ».

L'acceptation de cet axiome conduit au paradoxe suivant, appelé paradoxe de Banach-Tarski-Hausdorff (parfois Banach-Tarski) : « Dans $\mathbb{R}^3$, si l'on considère deux parties bornées et d'intérieurs non vides, il est possible de découper l'une en un nombre fini de morceaux, et en effectuant des *déplacements* de ces morceaux obtenir l'autre partie par réunion », dit autrement : « il est possible de faire un puzzle avec l'une des parties et en le ré-assemblant autrement obtenir l'autre partie » cette propriété sera appelée la propriété B.T.H.[1]

L'aspect paradoxal saute aux yeux : la notion même de volume semble remise en cause !

Définitions et notations

On note E l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures naturelles d'espace vectoriel et affine euclidien.

On désigne par $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ la base canonique de E et l'on oriente l'espace en décidant que cette base est directe. Le point $(0,0,0)$ sera simplement noté O.

[1]Cette propriété a été établie en 1924 dans un article signé de Banach et Tarski, ils font référence à Hausdorff qui a imaginé le découpage de la sphère.

Deux parties A et B de E sont dites *équivalentes par déplacement* (en abrégé $\mathcal{D}$-équivalentes) si et seulement si il existe un déplacement φ de E (c'est-à-dire une isométrie directe) tel que $\varphi(A) = B$. On écrit alors $A\mathcal{D}B$ et il est clair qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties de E.

Soit A une partie de E, on appelle puzzle de A toute famille[2] finie $(A_1, \dots, A_n)$ de parties de A, éventuellement vides, deux à deux disjointes et dont la réunion est A.

Des parties A et B de E seront dites *puzzle-équivalentes* ($\mathcal{P}$-équivalentes en abrégé) s'il existe un entier n et deux puzzles $(A_1, \dots, A_n)$ et $(B_1, \dots, B_n)$ le premier de A le second de B tels que pour tout i on ait $A_i\mathcal{D}B_i$. En d'autres termes il est possible de découper A en un puzzle qui, reconstruit autrement après déplacement des morceaux, donne B.

On rappelle qu'une partie A de E est dite bornée s'il existe une boule qui la contient et d'intérieur non vide si elle contient une boule de rayon strictement positif.

Enfin on considérera comme connu le fait qu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable et que le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.[3]

Première partie

Où l'on étudie la $\mathcal{P}$-équivalence.

1. Soient A et A' (resp. B et B') deux parties de E disjointes et $\mathcal{P}$-équivalentes, démontrer que $A \cup A'$ et $B \cup B'$ sont $\mathcal{P}$-équivalentes.
2. Démontrer que $\mathcal{P}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties de E.
3. On note S l'ensemble $S = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in E \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ c'est-à-dire la sphère unité de E. On note Γ le cercle obtenu en coupant S par le plan d'équation $z = 0$.
   (a) En s'intéressant à l'ensemble $A = \{(\cos n, \sin n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ établir que Γ est $\mathcal{P}$-équivalente à $\Gamma \setminus \{(1, 0, 0)\}$.
   (b) Démontrer que S est $\mathcal{P}$-équivalente à $S \setminus \{(1, 0, 0)\}$.
   (c) Soit K la boule fermée de centre O et de rayon 1, démontrer que K est $\mathcal{P}$-équivalente à $K \setminus \{(1, 0, 0)\}$ ainsi qu'à $K \setminus \{O\}$.
4. Soient A et B des parties de E, on se propose d'établir que si chaque partie est $\mathcal{P}$-équivalente à une partie de l'autre alors A et B sont $\mathcal{P}$-équivalentes. Pour cela soient A' et B' telles que $A' \subset A$, $B' \subset B$. On suppose $A\mathcal{P}B'$ et $B\mathcal{P}A'$.
   (a) Justifier qu'il est possible de trouver un puzzle $(A_1, \dots, A_n)$ de A et une bijection $f : A \to B'$ tels que pour tout i l'application f coïncide avec un déplacement sur A_i. On construit de même une application bijective $g : B \to A'$ subordonnée à un puzzle $(B_1, \dots, B_p)$ de B.

[2] Il ne s'agit pas d'une partition puisqu'une partition serait constituée d'un *ensemble* de parties *non vides*.

[3] Consulter l'appendice page 317.

(b) On note $\widehat{f} : A \to B$ et $\widehat{g} : B \to A$ les applications qui agissent comme f et g. On définit l'ensemble X par la formule

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\widehat{g} \circ \widehat{f}\right)^n (A \backslash A')$$

dans cette formule $\left(\widehat{g} \circ \widehat{f}\right)^n$ désigne la n-ième itérée de $\widehat{g} \circ \widehat{f}$ avec la convention que pour $n = 0$ il s'agit de l'application identique de A. On définit alors l'application $h : A \to B$ par

$$\begin{cases} \text{si } x \in X & \text{alors } h(x) = f(x) \\ \text{si } x \in A \backslash X & \text{alors } h(x) = g^{-1}(x) \end{cases}$$

Justifier l'existence et la bijectivité[4] de l'application h.

(c) Démontrer que A et B sont $\mathcal{P}$-équivalentes.

Deuxième partie

Où l'on construit un étrange puzzle de la sphère unité.

On considère les deux matrices à coefficients réels

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

et l'on note respectivement u et v les automorphismes de E représentés par U et V dans la base canonique.

1. Interpréter géométriquement u et v ; calculer u^n et v^n pour tout n dans $\mathbb{Z}$.
2. On désigne par G le groupe multiplicatif (loi $\circ$) engendré par u et v.

(a) Démontrer que G est constitué de l'identité (notée e) de u et des éléments de la forme

$$r = u^{\varepsilon_1} \circ v^{n_1} \circ u \circ v^{n_2} \circ u \circ \cdots \circ u \circ v^{n_k} \circ u^{\varepsilon_2} \qquad (1.1)$$

où k décrit $\mathbb{N}^*$, ε_i est pris dans $\{0, 1\}$ et chaque n_i est pris dans $\{1, 2\}$.

(b) Soit r un élément de G de la forme (1.1) et pour lequel on a $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = 1$. Soit R sa matrice représentative dans la base canonique, démontrer que

$$R = \frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1\sqrt{3} \\ a_2 & b_2 & c_2\sqrt{3} \\ a_3\sqrt{3} & b_3\sqrt{3} & c_3 \end{bmatrix}$$

où a_i, b_i, c_i désignent des entiers relatifs dont on déterminera les parités. En déduire que $r \neq e$ et $r \neq u$.

[4]On notera que dans cette question on établit une preuve du théorème dit de Cantor-Bernstein : « Si A et B sont deux ensembles et s'il existe à la fois une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection entre A et B. »

(c) Démontrer que tout élément de $G\backslash\{e, u\}$ se met de façon unique sous la forme (1.1).

(d) Établir que G est un ensemble dénombrable.

3. On effectue une partition $\{G_1, G_2, G_3\}$ de G de la manière suivante :
- pour tout n dans $\mathbb{N}$ les éléments $(v^2 \circ u)^n$ sont mis dans G_1
- pour tout n dans $\mathbb{N}$ les éléments $u \circ (v^2 \circ u)^n$ sont mis dans G_2
- pour tout n dans $\mathbb{N}$ les éléments $v \circ u \circ (v^2 \circ u)^n$ sont mis dans G_3
- enfin les autres éléments de G sont mis dans G_1 (resp. G_2 et G_3) selon que leur décomposition (1.1) commence à gauche par u (resp. v et v^2)
Démontrer que $G_3 = vG_2,\ \ G_2 = vG_1,\ \ G_1 = u\,(G_2 \cup G_3)$.

4. Soit D le sous-ensemble de S défini par

$$D = \{x \mid x \in S \quad \text{et} \ \ \exists r \in G\backslash\{e\} \quad r(x) = x\}$$

démontrer que l'ensemble D est dénombrable et que tout élément de G laisse stable les ensembles D et $S\backslash D$.

5. Pour tout élément x de $S\backslash D$ on note $\widehat{x}$ l'orbite de x sous l'action de G, justifier que ces orbites constituent une partition de l'ensemble $S\backslash D$.

6. On construit un ensemble T en choisissant[5] un élément dans chacune des orbites précédentes. On pose alors $A = G_1(T) = \{r(x) \mid r \in G_1 \ \text{et} \ \ x \in T\}$ et de même $B = G_2(T)$ et $C = G_3(T)$.

(a) Démontrer que (A, B, C, D) est un puzzle de S.

(b) Démontrer que $C\mathcal{D}B, \quad B\mathcal{D}A, \quad A\mathcal{D}(B \cup C)$.

Troisième partie

Où l'on prouve la proposition B.T.H.

1. Soient S' et S'' des sphères de rayon 1, disjointes de S et entre elles, de centres respectifs O' et O''. Soient (A', B', C', D') et (A'', B'', C'', D'') les puzzles de S' et S'' qui se déduisent de (A, B, C, D) par les translations envoyant O sur O' et O sur O''. Démontrer que

$$(S\backslash D)\mathcal{P}\left((S'\backslash D') \cup (S''\backslash D'')\right)$$

ce qui exprime que, à des ensembles dénombrables près, une sphère unité est $\mathcal{P}$-équivalente à deux sphères unité.

2. Démontrer l'existence d'au moins un point δ de S tel que δ et $-\delta$ n'appartiennent pas à D.

3. Démontrer l'existence d'une rotation ρ d'axe passant par O et dirigé par δ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, tout x dans D et tout y dans D on ait $\rho^n(x) \neq y$.

4. On va prouver que S est puzzle-équivalente à $S' \cup S''$.

[5]On notera que l'axiome du choix intervient clairement à cet endroit.

(a) Démontrer que les ensembles $\rho^n(D)$ où n décrit $\mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints.

(b) On pose $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \rho^n(D)$, démontrer que $U\mathcal{D}(U\backslash D)$. En déduire l'équivalence $S\mathcal{P}(S\backslash D)$ et enfin $S\mathcal{P}(S' \cup S'')$.

5. Soit K la boule unité fermée de centre O et K' et K'' les boules unité correspondantes de centres O' et O''.

(a) Démontrer que $(K\backslash\{0\})\,\mathcal{P}\left((K'\backslash\{0'\}) \cup (K''\backslash\{0''\})\right)$, en déduire l'équivalence $K\mathcal{P}(K' \cup K'')$.

(b) Démontrer que toute réunion finie de n boules unité ($n \geqslant 1$) disjointes deux à deux est puzzle-équivalente à K.

6. Soit X une partie bornée de E et contenant une boule fermée de rayon $r > 0$.

(a) Démontrer l'existence d'un puzzle $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de X tel que chaque X_i soit inclus dans une boule K_i de rayon r.

(b) Soit $(K_i')_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de boules fermées de rayon r et deux à deux disjointes. Démontrer que X est puzzle-équivalente à une partie de la réunion des boules K_i'.

(c) Démontrer que X est puzzle-équivalente à la boule de centre O et de rayon r.

(d) Démontrer l'énoncé B.T.H.

7. *Une conséquence du paradoxe B.T.H.* Démontrer qu'il est impossible d'attribuer de manière cohérente un volume à toute partie bornée de E. Plus précisément si on note $\mathcal{B}$ l'ensemble de toutes les parties bornées de E on souhaiterait pouvoir construire une fonction vol : $\mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ qui a toute partie bornée associerait un réel positif et respectant les trois conditions suivantes :
- (V_1) $\mathrm{vol}[0,1]^3 = 1$ (le volume du cube unité vaut 1)
- (V_2) $\mathrm{vol}(A\cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B)$ lorsque A et B sont des parties bornées disjointes (additivité finie du volume).
- (V_3) $\mathrm{vol}(A) = \mathrm{vol}(B)$ lorsque $A\mathcal{D}B$ (invariance du volume par déplacement)

On demande de prouver qu'une telle fonction vol n'existe pas.

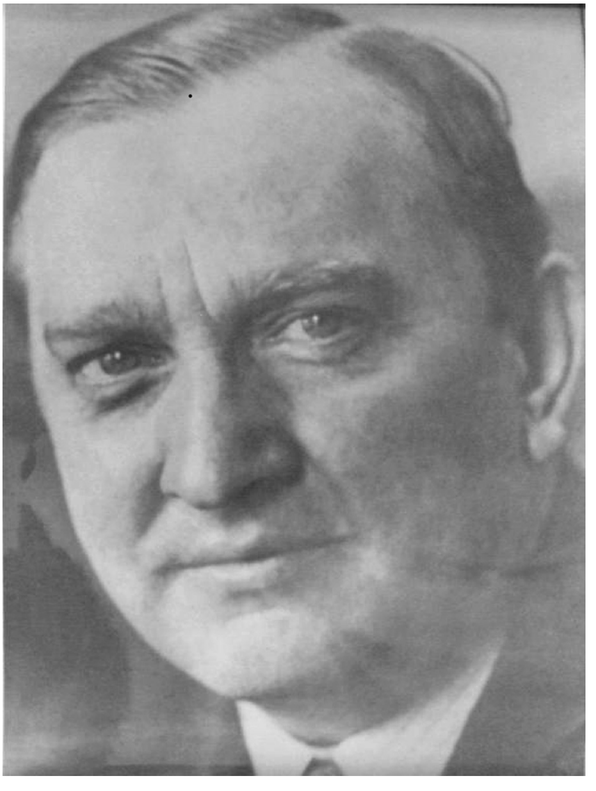

FIG. 1.1 – Le mathématicien Stephan Banach (1892-1945)

1.2 Corrigé

Première partie

Étude de la $\mathcal{P}$-équivalence.

1. Stabilité par réunion : il suffit de mettre les puzzles bout à bout en renumérotant les parties.

2. La $\mathcal{P}$-équivalence est bien une relation d'équivalence : la réflexivité s'obtient en prenant un puzzle à un seul morceau et l'application identique, la symétrie est immédiate puisque l'inverse d'un déplacement est un déplacement.

Détaillons la transitivité. Soient donc A, B, C des parties de E telles que $A\mathcal{P}B$ et $B\mathcal{P}C$. Il existe des puzzles $(A_1, \ldots, A_n)$ de A et $(B_1, \ldots, B_n)$ de B tels que pour tout i on ait $A_i\mathcal{D}B_i$, de même il existe des puzzles $\left(B'_1, \ldots, B'_p\right)$ et $(C_1, \ldots, C_p)$ de B et C tels que pour tout j on ait $B_j\mathcal{D}C_j$; le problème est que B est découpée de deux manières différentes. Notons f_i un déplacement qui envoie A_i sur B_i et g_j un déplacement qui envoie B'_j sur C_j. Les parties $B_i \cap B'_j$ où (i, j) décrit $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, p\}$ constituent un puzzle de B (quitte à renuméroter correctement par les entiers de 1 à np). Ensuite, puisque f_i est un déplacement donc une bijection, la famille $\left(f_i^{-1}\left(B_i \cap B'_j\right)\right)_{j\in\{1,\ldots,p\}}$ est un puzzle de A_i et la famille $(S_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,p\}}$ avec $S_{ij} = f_i^{-1}\left(B_i \cap B'_j\right)$ est un puzzle de A. De manière analogue la famille $(T_{ij})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,p\}}$ avec $T_{ij} = g_j\left(B_i \cap B'_j\right)$ est un puzzle de C. Enfin on a $S_{ij}\mathcal{D}T_{ij}$ en considérant la composée $g_j \circ f_i$ et finalement $A\mathcal{P}C$.

3. Exemples.

a) Le cercle Γ est $\mathcal{P}$-équivalent à $\Gamma\backslash\{(1,0,0)\}$: considérons, comme le suggère l'énoncé, l'ensemble $A = \{(\cos n, \sin n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ constitué des points du cercle dont les angles polaires sont entiers (par rapport au repère naturel) et considérons la rotation f d'axe Oz et d'angle de mesure 1. Elle envoie A sur l'ensemble $B = \{(\cos(n+1), \sin(n+1), 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Du fait que π est irrationnel, l'égalité $(\cos p, \sin p) = (\cos q, \sin q)$ avec p et q entiers entraîne $p = q$ puisque que si $p = q+2k\pi$ l'entier k ne peut être que nul ; il s'ensuit $B = A\backslash\{(1,0,0)\}$. Mais alors les relations $A\mathcal{D}\left(A\backslash\{(1,0,0)\}\right)$ (par f) et $(\Gamma\backslash A)\,\mathcal{D}\,(\Gamma\backslash A)$ (par l'identité) donnent $\Gamma\mathcal{P}\left(\Gamma\backslash\{(1,0,0)\}\right)$ à l'aide d'un puzzle de deux morceaux.

b) La sphère S est $\mathcal{P}$-équivalente à $S\backslash\{(1,0,0)\}$: immédiat, il suffit d'appliquer **1.** puisque $(S\backslash\Gamma)\,\mathcal{P}\,(S\backslash\Gamma)$.

c) La boule K est $\mathcal{P}$-équivalente à $K\backslash\{O\}$: dans un premier temps comme $(K\backslash S)\,\mathcal{P}\,(K\backslash S)$ on obtient $K\mathcal{P}\left(K\backslash\{(1,0,0)\}\right)$ toujours en utilisant le **1.**, il reste à prouver que $\left(K\backslash\{(1,0,0)\}\right)\mathcal{P}\left(K\backslash\{O\}\right)$. On a par réflexivité de $\mathcal{D}$ la relation $\left(K\backslash\{(1,0,0), O\}\right)\mathcal{D}\left(K\backslash\{(1,0,0), O\}\right)$ et aussi $\{O\}\mathcal{D}\{(1,0,0)\}$ par translation, d'où la conclusion en prenant des puzzles à deux morceaux.

4. a) Construction de f : puisque $A\mathcal{P}B'$ il existe des puzzles $(A_1, \ldots, A_n)$ et $(B'_1, \ldots, B'_n)$ respectivement de A et B' tels que pour tout i on ait $A_i\mathcal{D}B'_i$. Soit f_i un déplacement tel que $f(A_i) = B'_i$, les A_i étant deux à deux disjoints ainsi que les B'_i l'application $f : A \to B'$ qui sur chaque A_i agit comme f_i est une bijection.

b) Existence et bijectivité de h : pour l'existence de h il suffit de prouver que $A\backslash X \subset A'$, or on sait que $A\backslash A' = \left(\widehat{g}\circ\widehat{f}\right)^0 (A\backslash A') \subset X$. Par complémentarité cela donne bien $A\backslash X \subset A'$. Il reste à prouver que h est bijective.

Injectivité : soient x et x' dans A ayant la même image par h. Si x et x' sont tous les deux dans X ou dans $A\backslash X$ on a $x = x'$ par injectivité de f ou de g^{-1}.

Supposons maintenant x dans X et x' dans $A\backslash X$ et prouvons que l'égalité $h(x) = h(x')$ est impossible. Elle s'écrit $f(x) = g^{-1}(x')$ ou encore $x' = \widehat{g}\circ\widehat{f}(x)$. Comme x est dans X il existe un entier n et un élément y dans $A\backslash A'$ tels que $x = \left(\widehat{g}\circ\widehat{f}\right)^n (y)$ et alors $x' = \left(\widehat{g}\circ\widehat{f}\right)^{n+1} (y)$; l'élément x' serait dans X ce qui est absurde.

L'injectivité de h est bien prouvée.

Surjectivité : soit y un élément de B, prouvons qu'il est atteint par h. Considérons l'élément $x = g(y)$, de deux choses l'une :

- si x est dans $A\backslash X$, alors $h(x) = g^{-1}(x) = y$ et y est atteint par h
- si x est dans X, il existe un entier n dans $\mathbb{N}$ et un élément x' dans $A\backslash A'$ tels que $x = \left(\widehat{g}\circ\widehat{f}\right)^n (x')$, remarquons que $n = 0$ est impossible puisque x est dans $g(B) = A'$ tandis que x' est dans $A\backslash A'$, et donc $n \geqslant 1$; mais alors l'égalité $g(y) = x = \left(\widehat{g}\circ\widehat{f}\right)^n (x')$ implique par injectivité de $\widehat{g}$: $y = f\left(\left(\widehat{g}\circ\widehat{f}\right)^{n-1} (x')\right)$ or si l'on pose $u = \left(\widehat{g}\circ\widehat{f}\right)^{n-1} (x')$ cet élément est dans X (puisque x' est dans $A\backslash A'$) donc $y = f(u) = h(u)$ et y est bien atteint par h.

c) Preuve de l'équivalence $A\mathcal{P}B$: d'après ce qui précède la famille constituée des ensembles $(X \cap A_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $\left((A\backslash X) \cap g^{-1}(B_j)\right)_{1\leqslant j\leqslant p}$ est, après renumérotation, un puzzle de A. Par construction h coïncide sur chaque morceau de ce puzzle avec un déplacement (soit f_i soit g_j^{-1}) et h est une bijection de A sur B, on peut conclure $A\mathcal{P}B$.

Deuxième partie

Étude d'un puzzle de la sphère unité.

1. Interprétation géométrique de u et v : on remarque que U et V sont des matrices orthogonales de déterminant 1, elles représentent donc des rotations. Il est immédiat que u est le demi-tour autour la première bissectrice des axes Ox et Oy (les coordonnées x et y sont échangées tandis que z est remplacé par son opposé). Quant à v on reconnaît la rotation d'axe Ox dirigé par $\mathbf{i}$ et de mesure $\frac{4\pi}{3}$, il s'agit donc d'un tiers de tour dans le sens indirect.

Il résulte de ces interprétations que $u^2 = 1_E$ et $v^3 = 1_E$ on en déduit sans peine les puissances de u : on trouve 1_E ou u selon que n est pair ou impair et les puissances de v : on trouve $1_E, v, v^2$ selon que n est congru à $0, 1, 2$ modulo 3.

2. a) Détermination du sous-groupe G engendré par u et v : considérons l'ensemble H constitué des éléments e, u et de ceux de la forme (1.1) et