1
Taux d'évolution

1. TAUX GLOBAL ET TAUX MOYEN

1.1. Moyenne géométrique

Définition

Soit n un entier naturel non nul.
Pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel x strictement positif tel que $x^n = a$.
x est appelé racine n-ième de a, et noté $a^{\frac{1}{n}}$ (« a puissance $\frac{1}{n}$ »).

Exemples

a) La solution de l'équation $x^7 = 5$ dans $]0\,;+\infty[$ est $x = 5^{\frac{1}{7}} \approx 1,26$.

b) La solution de l'équation $x^{13} = 0,64$ dans $]0\,;+\infty[$ est $x = 0,64^{\frac{1}{13}} \approx 0,97$.

Définition

La moyenne géométrique de n nombres réels strictement positifs $a_1\,;a_2\,;...\,;a_n$ est le nombre $(a_1 \times a_2 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}$.
Par exemple, la moyenne géométrique des trois nombres 2 ; 9 et 12 est $(2 \times 9 \times 12)^{\frac{1}{3}} = (216)^{\frac{1}{3}} = 6$ (car $6^3 = 216$).

1.2. Taux d'évolution moyen

Exemple

Au cours de l'année passée, le prix d'un produit a successivement augmenté de 12 %, puis de 6 % et enfin baissé de 9 %.

Ce prix a donc été multiplié par $1+\frac{12}{100}=1+0,12$ puis par $1+0,06$ et enfin par $1-0,09$.

Le prix a donc finalement été multiplié par : $(1+0,12)\times(1+0,06)\times(1-0,09)$.

Le taux d'évolution global correspondant à cette évolution est le nombre T tel que : $1+T=(1+0,12)\times(1+0,06)\times(1-0,09)$.

Donc : $T=(1+0,12)\times(1+0,06)\times(1-0,09)-1=0,080352$.

Globalement, le prix a donc augmenté d'environ 8 %.

Le taux d'évolution moyen correspondant à ces trois évolutions successives est le taux t qui, répété trois fois, donnerait le même taux global T.

On a : $(1+t)\times(1+t)\times(1+t)=1+T$ soit $(1+t)^3=1+T=1,080352$.

Donc $1+t=(1,080352)^{\frac{1}{3}}$ soit $t=(1,080352)^{\frac{1}{3}}-1\approx 0,0261$.

Le taux moyen des trois évolutions successives est donc d'environ 2,61 %.

Définitions

Soit y_0 un nombre strictement positif.

Ce nombre subit une évolution de taux t_1, puis une évolution de taux t_2, …, et enfin une évolution de taux t_n.

. Le taux d'évolution global correspondant à ces évolutions successives est le nombre T tel que : $1+T=(1+t_1)\times(1+t_2)\times...\times(1+t_n)$.

Donc $T=(1+t_1)\times(1+t_2)\times...\times(1+t_n)-1$.

. Le coefficient multiplicateur moyen correspondant à ces évolutions successives est le nombre $1+t$ tel que : $(1+t)^n=(1+t_1)\times(1+t_2)\times...\times(1+t_n)$.

Donc $1+t=\left[(1+t_1)\times(1+t_2)\times...\times(1+t_n)\right]^{\frac{1}{n}}$.

Le coefficient multiplicateur moyen est donc la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs successifs.

. Le taux d'évolution moyen correspondant à ces évolutions successives est :

$$t=\left[(1+t_1)\times(1+t_2)\times...\times(1+t_n)\right]^{\frac{1}{n}}-1 \text{ ou encore : } t=(1+T)^{\frac{1}{n}}-1.$$

✍ Exercice d'application 1

1. Les ventes d'un magasin d'alimentation ont successivement augmenté de 16 % la première année, puis diminué de 8 % la deuxième année et de 4 % la troisième année.
   Calculer le taux d'évolution moyen au cours de ces trois années.
2. Dans un village à la campagne, le nombre d'enfants scolarisés a diminué de 11 % en 5 ans. Calculer le taux d'évolution annuel moyen du nombre d'enfants scolarisés.
3. Le nombre de chômeurs d'un pays a baissé de 3 % en un an.
   Calculer le taux d'évolution mensuel moyen du nombre de chômeurs.

Corrigé

1. Soit t le taux d'évolution moyen : $(1+t)^3 = (1+0,16)\times(1-0,08)\times(1-0,04)$.

Donc $1+t = [(1+0,16)\times(1-0,08)\times(1-0,04)]^{\frac{1}{3}}$.

Et $t = [(1+0,16)\times(1-0,08)\times(1-0,04)]^{\frac{1}{3}} - 1 = (1,024512)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 0,0081$.

Le taux d'évolution moyen au cours de ces trois années est donc d'environ 0,0081, ce qui signifie que les ventes ont augmenté en moyenne de 0,81 % par an.

2. Soit t le taux d'évolution annuel moyen. t est le taux t qui, répété cinq fois, donne le taux global de $-0,11$.

On a donc : $(1+t)^5 = 1-0,11 = 0,89$.

Donc $1+t = (0,89)^{\frac{1}{5}}$ et $t = (0,89)^{\frac{1}{5}} - 1 \approx -0,023037$.

Le taux d'évolution annuel moyen du nombre d'enfants scolarisés est donc d'environ –0,023037, ce qui signifie que le nombre d'enfants scolarisés a diminué en moyenne de 2,30 % par an.

3. Soit t le taux d'évolution mensuel moyen.

On a : $(1+t)^{12} = 1-0,03 = 0,97$.

Donc $t = (0,97)^{\frac{1}{12}} - 1 \approx -0,00254$.

Le taux d'évolution mensuel moyen du nombre de chômeurs est donc d'environ **–0,00254**, ce qui signifie qu'en moyenne le nombre de chômeurs a baissé de 0,25 % par mois.

2. INDICE SIMPLE EN BASE 100

2.1. Définition

Exemple

Une personne place un capital $y_1 = 2300$ €.
Le capital au bout d'un an est $y_2 = 2851$ €.
Sans chercher à trouver le taux d'intérêt annuel, calculons le capital qu'aurait acquis cette personne au bout d'un an si elle avait placé 100 € dans les mêmes conditions.

Appelons t le taux d'intérêt annuel.
D'après les hypothèses : $2300 \times (1+t) = 2851$, donc $1+t = \dfrac{2851}{2300}$.
Si la personne avait placé 100 € dans les mêmes conditions, au bout d'un an, son capital serait de : $100 \times (1+t) = 100 \times \dfrac{2851}{2300} \approx 123{,}96$ €.
Le nombre $100 \times \dfrac{2851}{2300}$ est appelé indice simple de y_2 par rapport à y_1.

Définition

On considère deux nombres strictement positifs y_1 et y_2.

L'indice simple de y_2 par rapport à y_1 est le nombre $I_{2/1} = 100 \times \dfrac{y_2}{y_1}$.

Remarques

On parlera souvent d'indice au lieu d'indice simple.
Un indice plus grand que 100 traduit une hausse : $y_2 > y_1$.
Un indice plus petit que 100 traduit une baisse : $y_2 < y_1$.
Un indice égal à 100 traduit une stabilité : $y_2 = y_1$.

✍ Exercice d'application 2

1. Calculer l'indice de $y_2 = 5$ par rapport à $y_1 = 8$, puis l'indice de y_1 par rapport à y_2.

2. C_1, C_2, C_3 et C_4 sont les chiffres d'affaires annuels, exprimés en millions d'euros, d'une entreprise d'informatique après respectivement 1 ; 2 ; 3 et 4 ans d'activité.

a) Sachant que $C_1 = 7,2$ et que l'indice de C_2 par rapport à C_1 est 135, calculer C_2.

b) Sachant que $C_4 = 8,64$ et que l'indice de C_4 par rapport à C_3 est 90,3, calculer C_3.

Corrigé

1. Par définition, l'indice de y_2 par rapport à y_1 est : $I_{2/1} = 100 \times \frac{y_2}{y_1} = 100 \times \frac{5}{8}$

$$\mathbf{I_{2/1} = 62,5}$$

et l'indice de y_1 par rapport à y_2 est : $I_{1/2} = 100 \times \frac{y_1}{y_2} = 100 \times \frac{8}{5}$

$$\mathbf{I_{1/2} = 160}$$

2. a) Par définition, l'indice de C_2 par rapport à C_1 est : $I_{2/1} = 100 \times \frac{C_2}{C_1}$.

Donc : $C_2 = \frac{I_{2/1} \times C_1}{100} = \frac{135 \times 7,2}{100} = 9,72$.

Le chiffre d'affaires de l'entreprise après deux ans d'activité est donc de 9,72 millions d'euros.

b) De la même manière, l'indice de C_4 par rapport à C_3 est : $I_{4/3} = 100 \times \frac{C_4}{C_3}$.

Donc : $C_3 = 100 \times \frac{C_4}{I_{4/3}} = 100 \times \frac{8,64}{90,3} \approx 9,57$.

Le chiffre d'affaires de l'entreprise après trois ans d'activité est donc d'environ 9,57 millions d'euros.

2.2. Lien entre indice et taux d'évolution

Soit t le taux d'évolution de y_1 à y_2.

On a : $y_2 = (1+t) \times y_1$, soit $1 + t = \frac{y_2}{y_1}$.

Or : $I_{2/1} = 100 \times \frac{y_2}{y_1}$.

Donc : $I_{2/1} = 100 \times (1+t) = 100 + 100t$ et $t = \dfrac{I_{2/1} - 100}{100}$.

✍ Exercice d'application 3

1. L'indice du nombre des acquisitions de DVD d'une médiathèque en janvier 2007 par rapport à janvier 2006 est 124,6.
Calculer le taux d'évolution du nombre des acquisitions de DVD entre janvier 2006 et janvier 2007.

2. Parmi les acquisitions de DVD effectuées entre janvier 2006 et janvier 2007, on note une baisse de 4,1 % des DVD musicaux.
Calculer l'indice du nombre des acquisitions de DVD musicaux en janvier 2007 par rapport à janvier 2006.

Corrigé

1. On utilise la relation entre taux d'évolution et indice.

Soit t le taux d'évolution cherché : $t = \dfrac{I_{2007/2006} - 100}{100} = \dfrac{124,6 - 100}{100} = 0,246$.

Le taux d'évolution du nombre des acquisitions de livres entre janvier 2006 et janvier 2007 est donc de 0,246, ce qui signifie que les acquisitions ont augmenté de 24,6 %.

2. Soit $I_{2007/2006}$ l'indice du nombre des acquisitions de DVD en janvier 2007 par rapport à janvier 2006.

D'après l'hypothèse : $I_{2007/2006} = 100 \times (1+t) = 100 \times (1 - 0,041) = 95,9$.

Donc l'indice du nombre des acquisitions de DVD musicaux en janvier 2007 par rapport à janvier 2006 vaut 95,9, ce qui signifie que si la médiathèque avait acquis 100 DVD musicaux en janvier 2006, elle en aurait acquis seulement 95,9 en janvier 2007.

3. APPROXIMATION D'UN TAUX D'EVOLUTION

Propriété

. Si le taux d'évolution t est petit, pour deux évolutions successives de taux t, le taux global est voisin de 2t :

$$(1+t)^2 \approx 1 + 2t.$$

. Si le taux d'évolution t est petit, le taux d'évolution réciproque est voisin de $-t$:

$$\frac{1}{1+t} \approx 1-t.$$

Exercice d'application 4

1. Au cours de l'année écoulée, le prix d'un produit a subi deux évolutions successives de même taux $t = -0,6\,\%$.
   En justifiant, donner une valeur approchée du taux d'évolution global du prix de ce produit au cours de l'année.
2. Le taux d'évolution d'un produit du 1er au 31 août est $t = -0,8\,\%$.
   En justifiant, donner une valeur approchée du taux d'évolution réciproque.

Corrigé

1. $t = -0,006$. Le taux d'évolution t est petit (proche de 0).
On peut prendre comme valeur approchée du taux d'évolution global 2t.

Une valeur approchée du taux d'évolution global est donc –0,012.

Globalement, le prix a donc baissé de 1,2 %.

2. $t = -0,008$. Le taux d'évolution t est petit (proche de 0).
On peut prendre comme valeur approchée du taux d'évolution réciproque $-t$.

Une valeur approchée du taux d'évolution réciproque est donc $0,008$

(ce qui correspond à une hausse de 0,8 %).