CHAPITRE 1

Fonctions de la variable réelle et représentation

Ce premier chapitre est une révision du programme de Terminale S. Le but de la première section est de se familiariser avec le calcul algébrique. Ensuite, on définit et représente les fonctions de la variable réelle. On termine avec les fonctions usuelles en rappelant les théorèmes importants.

I Calculs algébriques

Dans la suite, une expression algébrique est une expression de la forme :

$$x^2+2x, \qquad x^3+(2x+4)(x^2+x^4)+\frac{x+1}{x^2+5}, \qquad xy+y^3...$$

où les quantités x, y sont des nombres réels ou complexes. Pour étudier de telles expressions, on utilisera principalement les **identités remarquables** suivantes (valables pour $a, b \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2; & a^2-b^2 &= (a-b)(a+b);\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2; & a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2).\end{aligned}$$

Plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right).$$

Exercice 1.1. 1. Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$\mathrm{A}(x)=(x+1)(x+2)(x-1)(x-2) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(x,y)=(x-3y)(x+3y)(x^2+9y^2)(x^4+81y^4).$$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$$\mathrm{C}(x)=(4x+8)(x-2)+(4-2x)x+(x+3)(6-3x), \qquad \mathrm{D}(x)=x^3-x^2-x+1$$

$$\mathrm{E}(x)=x^5-3x^4-2x^3+6x^2+x-3 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}(x,y)=9x^2y^4-3x^4y^2-6x^3y^2+18xy^4.$$

Un des premiers objectifs du calcul algébrique est de **résoudre des équations**.
Par exemple, résoudre l'équation $\mathrm{C}(x)=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$, c'est trouver tous les nombres complexes x vérifiant $\mathrm{C}(x)=0$. La factorisation obtenue

$$\mathrm{C}(x)=-(x-2)(x+1)$$

permet de conclure qu'il y a exactement deux solutions $x = 2$ et $x = -1$. En effet, un produit de complexes est nul si et seulement si l'un de ses facteurs l'est.
Dans le cas de nombres réels, on peut se poser la question du signe de l'expression. En reprenant l'exemple précédent, on peut regarder les cas où

$$\mathrm{C}(x) \geqslant 0 \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}.$$

On **résout une inéquation**. Pour cela, on fait un **tableau de signe**.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$-(x+1)$		$+$	0	$-$		$-$	
$\mathrm{C}(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

En conclusion, $\mathrm{C}(x)$ est strictement négatif pour x strictement inférieur à -1 ou strictement supérieur à 2, égale à 0 si $x = 2$ ou $x = -1$ et strictement positif sinon.


Exercice 1.2. 1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$x^4 + 4 = 4x^2 \quad \text{et} \quad (x^4 - x^3 + 4x - 1)^2 = (x^4 + x^3 - 4x - 1)^2.$$

2. Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2x^2 \leqslant 18, \quad (x-1)(x^2+9) < 6(x-1)x \quad \text{et} \quad \frac{3x}{x^2+x+1} < 1.$$

II Représentation d'une fonction de la variable réelle

Pour rappel, définir une fonction f de la variable réelle sur un ensemble $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}$, c'est associer à tout élément x de D un unique nombre noté $f(x)$.

⚠ **Attention.** On prendra garde de bien distinguer l'expression $f(x)$ de la fonction f.

Scilab. Pour définir une fonction avec le logiciel de calcul SCILAB , on peut utiliser la ligne de commande

`function` $\cdots$ `endfunction`.

Par exemple, les fonctions $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 4x\exp(x^2)$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x+4}{x^2+1}$ sont obtenues et évaluées par :

```
function y=f(x);
  y=4*x*exp(x^2);
endfunction

 function y=g(x)
   y=(x+4)/(x^2+1)
 endfunction
```

```
--> f(2), g(1)
       ans  =
           436.7852

       ans  =
            2.5
```

II.1 Graphe et symétrie

Définition — Graphe d'une fonction

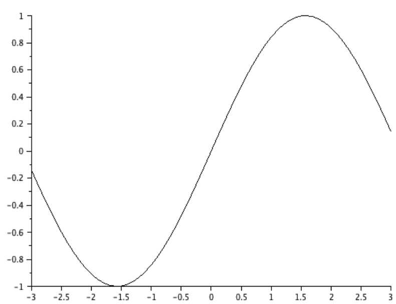
Soit $f : \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$. Le ***graphe*** *de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :*

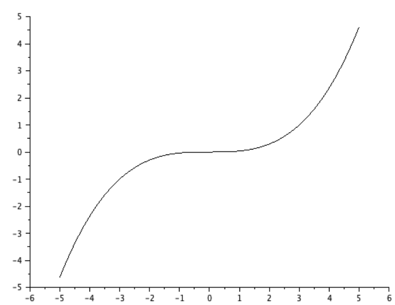
$$\mathrm{G} = \Big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in \mathrm{D}_f\Big\}.$$

Scilab. Pour tracer le graphe d'une fonction, on ne peut évidemment pas calculer l'ordonnée $f(x)$ pour tout x appartenant au domaine de définition de f. On considère plutôt quelques abscisses, puis on évalue la fonction en ces valeurs. On relie ensuite les points obtenus.
C'est ce principe qui est utilisé par Scilab pour tracer le graphe d'une fonction f. Pour cela, on définit les quelques points (répartis uniformément suivant un certain **pas**), on calcule $y = f(x)$ puis on trace via la commande **plot2d**. Les points sont alors reliés par des segments.
Voici le code pour tracer le graphe des fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3/27$ respectivement sur $[-3; 3]$ et $[-5; 5]$.

```
x=-3:0.1:3;     // pas de 0.1
y=sin(x);
plot2d(x,y)
```

```
x=-5:0.1:5;
z=1/27*x^3;
plot2d(x,z)
```





Exercice 1.3. ($\star$). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction. Quel est le lien entre le graphe de f et celui de $g : x \mapsto f(-x)$? Même question avec $h : x \mapsto -f(x)$ et $i : x \mapsto f(x-1)+2$.

Définition — Parité

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ symétrique (si $x \in \mathrm{I}$ alors $-x \in \mathrm{I}$), on dit que :

- *f est* ***paire*** *si pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $f(-x) = f(x)$;*
- *f est* ***impaire*** *si pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $f(-x) = -f(x)$.*

Exemples.
- Les fonctions cosinus, valeur absolue et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ sont paires;
- Les fonctions linéaires, sinus et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ sont impaires.

DÉFINITION **Périodicité**

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que :

- *f est* T-***périodique*** *si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.*
- *f est* ***périodique*** *s'il existe $\mathrm{T} \in \mathbb{R}_*^+$ tel que f soit T-périodique.*

Exemples. • Les fonctions cosinus et sinus sont $2\pi-$périodiques.

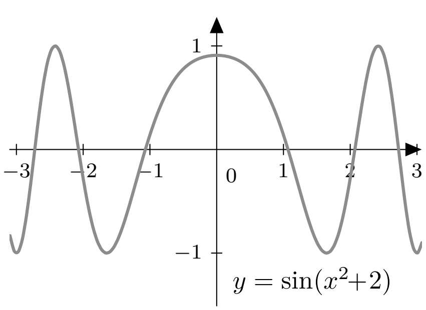
- Les fonctions constantes sont T-périodiques pour tout réel $\mathrm{T} > 0$.

Exercice 1.4. Pour chacune des fonctions périodiques, préciser une période.

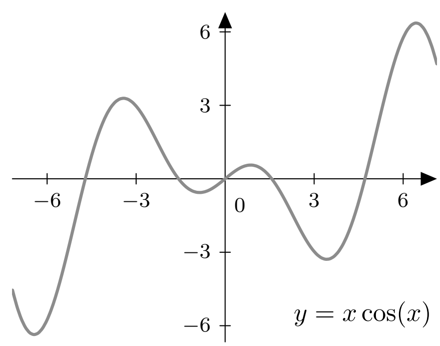
$$g : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(\pi x) \quad \text{et} \quad h : \ x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x-1)\cos(2x) + 2.$$

Remarques. • Une fonction T-périodique est aussi 2T-périodique, 3T-périodique.. De plus, la somme et le produit de fonctions T périodiques restent une fonction T-périodique.
• Dans la suite, on se place dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthogonal.
Graphiquement, dire que la fonction est paire (respectivement impaire) signifie que la courbe représentative de f a une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (resp. une symétrie centrale par rapport à l'origine).
Le graphe représentatif d'une fonction T-périodique est invariant par une translation de vecteur $\mathrm{T}\vec{\imath}$.

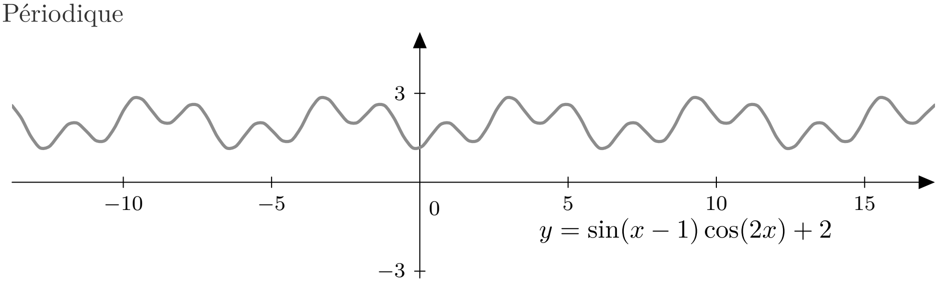
Paire



Impaire



Périodique



• En pratique, ces diverses symétries permettent de réduire l'intervalle d'étude de la fonction. Pour une fonction paire ou impaire, on se limite à $\mathrm{I} \cap \mathbb{R}^+$ et à $[0;\mathrm{T}]$ (ou $[-\mathrm{T}/2;\mathrm{T}/2]$) dans le cas T-périodique.

II.2 Graphe et monotonie

Définition — **Monotonie**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, on dit que :

- *f est **croissante sur** I si pour tous $x, y \in \mathrm{I}$, $x \leqslant y$ implique $f(x) \leqslant f(y)$;*
- *f est **décroissante sur** I si pour tous $x, y \in \mathrm{I}$, $x \leqslant y$ implique $f(x) \geqslant f(y)$;*
- *f est **monotone sur** I si elle est croissante ou décroissante sur I.*

Exemples.

- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$;
- La fonction cosinus est décroissante sur $[0; \pi/2]$;
- $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$, décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$, mais n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet, on a par exemple,
$$-2 \leqslant 2 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{-2} < \frac{1}{2}.$$
- Une fonction à la fois croissante et décroissante est constante.

Remarques. • La courbe d'une fonction croissante "monte" alors que la courbe d'une fonction décroissante "descend".
• On définit aussi la **stricte croissance/décroissance** en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes. Par exemple, f est strictement croissante sur I si pour tous $x, y \in \mathrm{I}$, $x < y$ implique $f(x) < f(y)$.

Exercice 1.5. ($\star\star$). Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et périodique ?

Exercice 1.6. *Vrai ou faux ?*
1. La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. Le produit de fonctions croissantes est une fonction croissante.

Proposition — **Monotonie et composition**

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.
On suppose que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \in \mathrm{J}$, de sorte que la composée $g \circ f : x \in \mathrm{I} \mapsto g\big(f(x)\big)$ soit bien définie.
On suppose de plus que f et g sont monotones sur I.

- *Si f et g ont le même sens de variations, alors $g \circ f$ est croissante.*
- *Si f et g n'ont pas le même sens de variations, alors $g \circ f$ est décroissante.*

Preuve. Prouvons le cas où f et g sont respectivement croissante et décroissante. Les autres cas étant similaires.
Soient $x, y \in \mathrm{I}$, par décroissance de f, puis par croissance de g,

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant f(y) \quad \Rightarrow \quad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) \geqslant g\big(f(y)\big) = g \circ f(y).$$

La fonction $g \circ f$ est décroissante. ■

Exercice 1.7. ($\star$). Étudier, *sans dérivation*, la monotonie des fonctions :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{et} \quad h : x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2.$$

Lorsque la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable (I est un *intervalle*), il existe un bon critère pour étudier les variations de la fonction : le signe de la dérivée.

PROPOSITION **Dérivabilité et croissance**

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction avec I *un intervalle. Alors*

$$f \text{ est croissante sur I si et seulement si } f'(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \mathrm{I}.$$

De plus, $$f \text{ est décroissante sur I si et seulement si } f'(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x \in \mathrm{I}.$$

Exercice 1.8. Que pensez-vous de la rédaction suivante ?

La fonction $f(x) = 1/x$ est définie pour $x \neq 0$. De plus, on a $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0$. La dérivée est négative, d'après le théorème précédent, la fonction $1/x$ est décroissante.

Remarque. On en déduit qu'une fonction f, définie sur un intervalle I, est constante si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$.

III Les fonctions usuelles

III.1 Polynômes et fractions rationnelles

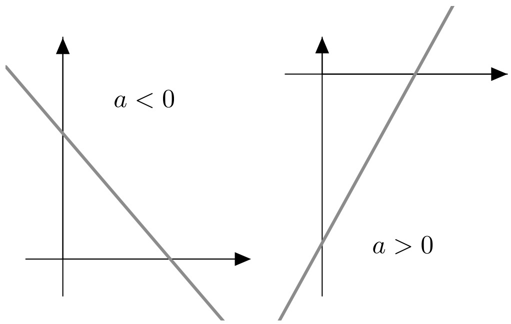
Les fonctions polynomiales de degré 1 et 2

- Une **fonction polynomiale de degré 1** (ou fonction affine) est définie par

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}.$$

  - a représente la **pente** ou encore le **coefficient directeur de** f ;
  - b est **l'ordonnée à l'origine** (puisque $f(0) = b$).

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite. Deux cas sont possibles suivant le signe du coefficient directeur a.



- Une **fonction polynomiale de degré deux** (ou trinôme) est définie par

$$f\,:\, x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2 + bx + c \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad b,\, c \in \mathbb{R}.$$

On réécrit l'expression précédente sous **forme canonique**

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

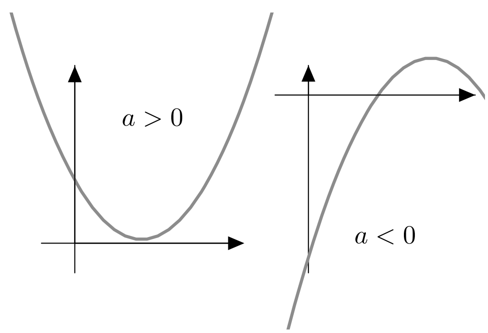
En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a\Big[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{a}{c}\Big] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{a}{c}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Les courbes repésentatives sont des **paraboles**. Le sommet de la parabole est donné par le point de coordonnées

$$\big(-b/(2a), -\Delta/(4a)\big)$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ désigne le **discriminant.** Deux cas sont possibles suivant le signe de a. Dans le premier cas ($a > 0$), on parle de **convexité** et il existe un unique minimum, dans le second cas ($a < 0$), on parle de **concavité** et il existe un unique maximum.



Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ sont les racines de la fonction polynomiale. Il y a au plus deux racines pour une fonctions polynomiale de degré 2 :

- $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles distinctes données par $x_\pm = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- $\Delta = 0$, il y a une solution dite double donnée par $x = \dfrac{-b}{2a}$;
- $\Delta < 0$, il n'y a pas de solutions réelles.

Les fonctions polynomiales de degré supérieur à 3

On définit une fonction polynomiale de degré $p \in \mathbb{N}^*$ par

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_0 \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0.$$

Étudions un exemple : posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \in \mathbb{R}$.
Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la dérivée de f est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

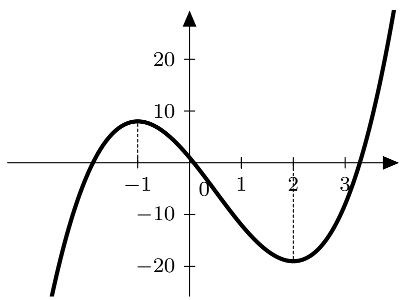
$$f'(x) = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1).$$

Pour calculer les limites en $\pm\infty$, on peut écrire

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = x^3\Big(2 - \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^3}\Big) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty.$$

On peut conclure en donnant le tableau de variations et le graphe de f.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-19	$\nearrow$	$+\infty$



Remarque. Revenons au cas général. On a pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \cdots + a_0 = a_p x^p \Big(1 + \frac{a_{p-1}}{a_p x} + \cdots + \frac{a_0}{a_p x^p}\Big).$$

On en déduit le tableau de limites suivant.

	$a_p < 0$	$a_p > 0$
p pair	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$
p impair	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Fractions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont les quotients de deux fonctions polynomiales :

$$\mathrm{F} = \frac{p}{q} \text{ avec } p, q \text{ deux fonctions polynomiales avec } q \text{ non identiquement nulle.}$$