Sujet 2019

Exercice 1 ....

Partie 1 : étude d'un exemple

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer un polynôme annulateur de A qui soit de degré 2.

b) En déduire les deux valeurs propres possibles λ_1 et λ_2 de A (avec $\lambda_1 < \lambda_2$).

c) En `Scilab`, la commande `r=rank(M)` renvoie dans la variable `r` le rang de la matrice M.
On a saisi :

```
A=[1,0,0;-2,3,-2;-1,1,0]
r1=rank(A-eye(3,3))
r2=rank(A-2*eye(3,3))
disp(r1,'r1=')
disp(r2,"r2=')
```

`Scilab` a renvoyé :

```
r1  =
     1.
r2  =
     2.
```

Que peut-on conjecturer quant aux valeurs propres de f et à la dimension des sous-espaces propres associés ?

d) Donner une base de chacun des noyaux $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$.

2) a) Justifier qu'il existe une base (u_1, v_1, v_2) de $\mathbb{R}^3$, où (u_1, v_1) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ et (v_2) une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_2 Id)$. On choisira ces vecteurs de façon que leurs composantes soient des entiers naturels les plus petits possible, la dernière composante de u_1 et la première de v_1 étant nulles.

b) On note $x = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer, en fonction de a, b et c les coordonnées de x dans la base (u_1, v_1, v_2).

Partie 2 : généralisation

Soit n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p \geq 2$, soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, et f un endomorphisme diagonalisable de E ayant p valeurs propres, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, deux à deux distinctes.

On se propose de déterminer la décomposition de chaque vecteur x de E sur la somme directe $\bigoplus_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D.

a) En notant I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

$$(D - \lambda_1 I_n)(D - \lambda_2 I_n)...(D - \lambda_p I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

b) En déduire un polynôme annulateur de f.

Pour chaque k de $[\![1, p]\!]$, on définit le polynôme $L_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$.

4) a) En distinguant les cas $i = k$ et $i \neq k$, calculer $L_k(\lambda_i)$.

b) Montrer que $(L_1, L_2, ..., L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Établir alors que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{p-1}[X],\ P = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) L_k$$

d) En déduire que $\sum_{i=1}^{p} L_i = 1$.

5) a) Montrer que, pour tout x de E, $L_k(f)(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f - \lambda_k Id)$, où $L_k(f)(x)$ désigne l'image du vecteur x de E par l'endomorphisme $L_k(f)$.

b) En déduire la décomposition cherchée.

6) Vérifier que cette dernière décomposition redonne celle obtenue pour l'endomorphisme f de la partie 1, si l'on choisit $n = 3$, $E = \mathbb{R}^3$ et $p = 2$.

Exercice 2 ....

Partie 1 : question préliminaire et présentation de 2 variables aléatoires X et T

1) On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'expression, pour tout réel x, de $\operatorname{Arctan}'(x)$.

b) Donner la valeur de $\operatorname{Arctan}(1)$ puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

c) Justifier l'équivalent suivant :

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$$

2) a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

3) a) Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) Déterminer la fonction de répartition G de T.

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires associée à X

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, P), mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = \max(X_1, ..., X_{,n})$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, P).

4) a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{\pi}{n} M_n$. Justifier que la fonction de répartition de Y_n, notée G_n, est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n$$

5) a) Déterminer, pour tout x négatif ou nul, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

b) Montrer que, pour tout x strictement positif, on a :

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n$$

c) En déduire pour tout x strictement positif, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

d) Déduire des questions précédentes que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers T.

Exercice 3 ....

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.
On se place dans un espace euclidien E de dimension n et on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme de x est notée $\| x \|$.

Partie 1 : définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E

Dans toute cette partie, u désigne un endomorphisme de E.
On se propose de montrer qu'il existe un unique endomorphisme de E, noté u^*, qui à tout vecteur y de E associe le vecteur $u^*(y)$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

1) a) Montrer que si u^* existe, alors on a, pour tout y de E :

$$u^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle u(e_i), y\rangle e_i$$

b) En déduire que si u^* existe, alors u^* est unique.
2) a) Vérifier que l'application u^* définie par l'égalité établie à la question 1a) est effectivement un endomorphisme de E.
b) Conclure que cette application est solution du problème posé, c'est-à-dire que c'est l'unique endomorphisme de E, appelé adjoint de u, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

Partie 2 : étude des endomorphismes normaux

On dit que u est un endomorphisme normal quand on a l'égalité : $u \circ u^* = u^* \circ u$.

3) Soit f un endomorphisme symétrique de E. Donner son adjoint et vérifier que f est normal.

Dans la suite, u désigne un endomorphisme normal.

4) a) Montrer que : $\forall x \in E,\ \| u(x) \| = \| u^*(x) \|$

b) En déduire que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^*)$.

5) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

6) On suppose que u possède une valeur propre λ et on note E_λ le sous espace propre associé.

a) Montrer que E_λ est stable par u^*.

b) Établir que $(u^*)^* = u$ puis en déduire que $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Problème ....

Partie 1

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et on appelle fonction génératrice de X, la fonction G définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)t^k$.

1) Calculer $G(1)$.

2) Exprimer l'espérance de X à l'aide de la fonction G.

3) Établir la relation :

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$$

Partie 2

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

4) a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$$

b) Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \ln n + \frac{1}{n} \leq u_n \leq \ln n + 1$$

c) En déduire un équivalent très simple de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

5) Montrer que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Partie 3

Dans cette partie, n désigne toujours un entier naturel non nul.

6) On admet que, si a et b sont des entiers tels que $a < b$, la commande `grand(1,1,'uin',a,b)` permet à `Scilab` de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme discrète sur $[\![a, b]\!]$.

Compléter le script suivant pour que les lignes (5), (6), (7) et (8) permettent d'échanger les contenus des variables `A(j)` et `A(p)`.

```
n=input('entrez une valeur pour n :')
A=1:n
p=n
for k=1:n
    j=grand(1,1,'uin',1,p)
    aux=----
    A(j)=----
    A(p)=----
    p=p-1
end
disp(A)
```

7) On suppose dorénavant qu'après exécution du script précédent correctement complété, le vecteur `A` est rempli de façon aléatoire par les entiers de $[\![1,n]\!]$ de telle sorte que les $n!$ permutations soient équiprobables. On considère alors les commandes `Scilab` suivantes (exécutées à la suite du script précédent) :

```
m=A(1)
c=1
for k=2:n
    if A(k)>m then  m=A(k)
    c=k
    end
end
disp(c)
```

a) Expliquer pourquoi, à la fin de la boucle `for`, la variable `m` contient la valeur n.

b) Quel est le contenu de la variable `c` affiché à la fin de ces commandes ?

c) On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `find(test)` permet de trouver à quelle(s) place(s) se trouvent les éléments d'une matrice satisfaisant au test proposé.
Compléter le script `Scilab` ci-dessous afin qu'il renvoie et affiche le contenu de la variable `c` étudiée plus haut :

```
c=find(----)
disp(c)
```

On admet que les contenus des variables informatiques `A(1)`, `A(2)`, ..., `A(n)` sont des variables aléatoires notées A_1, A_2, ..., A_n et que le nombre d'affectations concernant la variable informatique `c` effectuées au cours du script de la question 7), y compris la première, est aussi une variable aléatoire, notée X_n. On suppose que ces variables aléatoires sont toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note G_n la fonction génératrice de X_n, E_n son espérance et V_n sa variance.

8) Donner la loi de X_1.

9) a) Montrer que $X_n(\Omega)=[\![1,n]\!]$.

b) Déterminer $P(X_n=1)$ et $P(X_n=n)$. En déduire les lois de X_2 et X_3.

c) En considérant le système complet d'événements $((A_n=n),(A_n<n))$, montrer que :

$$\forall n\geq 2\,,\ \forall j\in[\![2,n]\!]\,,\ P(X_n=j)=\frac{1}{n}P(X_{n-1}=j-1)+\frac{n-1}{n}P(X_{n-1}=j)$$

d) Donner la loi de X_4.

10) a) Vérifier que la formule obtenue à la question 9c) reste valable pour $j=1$.

b) Établir la relation :

$$\forall n\geq 2\,,\ \forall t\in\mathbb{R}\,,\ G_n(t)=\frac{t+n-1}{n}G_{n-1}(t) \qquad (*)$$

c) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ \forall t\in\mathbb{R}\,,\ G_n(t)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(t+j)$.

11) En dérivant la relation $(*)$, trouver une relation entre E_n et E_{n-1} puis montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ E_n=u_n$$

12) Recherche d'un équivalent de V_n.

a) En dérivant une deuxième fois la relation $(*)$, montrer que :

$$\forall n\geq 2\,,\ V_n-V_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, V_n en fonction de u_n et h_n.

c) Montrer que $V_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Conseils 2019

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

Partie 1

1) a) Il faut calculer A^2 puis enlever un certain nombre de fois la matrice A afin d'annuler les termes non diagonaux et trouver une matrice proportionnelle à I.
On peut aussi présenter deux réels a et b tels que $A^2+aA+bI=0$ et identifier.

b) C'est du cours ! On doit chercher les racines du polynôme trouvé plus haut.

c) Il faut montrer que, d'après le script, $A-I$ et $A-2I$ ne sont pas inversibles. Ensuite, le théorème du rang appliqué à f permet de compléter la réponse.

d) Il suffit de résoudre, d'une part, $(A-I)X=0$, et, d'autre part, $(A-2I)X=0$, où X désigne un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2) a) Ici aussi, c'est du cours sur la diagonalisabilité d'un endomorphisme, ainsi que sur la concaténation.

b) Commencer en justifiant qu'il existe trois réels α, β et γ tels que :

$$(a,b,c)=\alpha u_1+\beta v_1+\gamma v_2$$

Partie 2

3) a) Chercher les éléments diagonaux nuls de $D-\lambda_1 I$, $D-\lambda_2 I$, …, $D-\lambda_p I$.

b) La clé, c'est que D est une matrice représentant f.

4) a) Pour $i=k$, le produit $\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\dfrac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$ est égal à $\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\dfrac{\lambda_k-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$, ce qui se simplifie !

Pour $i\neq k$, le produit $\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{p}\dfrac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$ contient un facteur nul.

b) Comme $(L_1,L_2,\dots,L_p)$ contient p vecteurs de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ qui est de dimension p, il suffit de montrer que $(L_1,L_2,\dots,L_p)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) Comme $(L_1,L_2,\dots,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$, il existe p réels $a_1,\dots,a_p$ tels que $P=\sum\limits_{i=1}^{p}a_i L_i$. Il reste à montrer que $a_i=P(\lambda_i)$.