Chapitre 2

Principe de relativité

Il existe plusieurs énoncés équivalents de ce principe. « Les lois de la physique sont identiques dans deux référentiels en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre » ou bien « Il n'est pas possible, par des mesures effectuées dans un référentiel d'inertie, de déterminer la vitesse de ce référentiel par rapport à un réferentiel absolu ». Le principe de relativité est donc une loi à laquelle doivent obéir les lois de la physique. Sa validité, pour une loi donnée, dépend de la manière avec laquelle les observables physiques se transforment lors du changement de référentiel. En particulier, la description du changement de référentiel joue un rôle crucial. Ainsi, nous verrons d'abord que ce principe est valide pour des particules en interaction par un potentiel si les transformations de Galilée sont utilisées pour passer d'un référentiel d'inertie à un autre. Or ces transformations ne laissent pas la vitesse de la lumière invariante donc ne peuvent être des symétries des équations de Maxwell. Einstein a alors proposé de garder le principe de relativité mais d'abandonner les transformations de Galilée. Les nouvelles transformations, dites de Lorentz, sont déterminées dans la deuxième section de ce chapitre. Puis leurs principales propriétés sont étudiées. La relativité restreinte est le cadre formé par l'ensemble du principe de relativité et des transformations de Lorentz pour décrire les changements inertiels de référentiels.

2.1 Relativité galiléenne

Considérons un système de particules, décrites par leurs positions $\vec{x}_A$, qui interagissent par l'intermédiaire d'un potentiel à deux particules V. Les équations du mouvement sont alors données par

$$m_A \ddot{\vec{x}}_A = -\vec{\nabla}_A \sum_{B \neq A} V(|\vec{x}_A - \vec{x}_B|), \tag{2.1.1}$$

où $\vec{\nabla}_A$ est le gradient relatif à la particule A. Les équations ne sont pas valides dans tous les référentiels. Il existe des référentiels où elles le sont et ceux-là sont dits référentiels d'inertie. Les transformations qui permettent de passer d'un référentiel d'inertie à un autre forment un groupe que nous appellerons le groupe de symétrie. Ce groupe est formé par les translations (spatiales et aussi temporelles)

$$\vec{x}'_A(t) = \vec{x}_A(t+t_0) - \vec{a}, \tag{2.1.2}$$

les rotations

$$x'_A{}^i(t) = \sum_{j=1}^{3} R^i{}_j x^j_A(t), \quad R^T R = 1, \tag{2.1.3}$$

et les transformations de Galilée

$$\vec{x}'_A = \vec{x}_A - \vec{V}t. \tag{2.1.4}$$

Le groupe de symétrie dépend de 10 paramètres et s'appelle le groupe Euclidien de Galilée. L'invariance sous les translations et rotations exprime l'isotropie et l'homogéneité de l'espace et le temps : il n'y a pas de points ou de directions privilégiés. Ce sont donc des symétries d'origine géométrique. Les vecteurs $\vec{V}$ sont les vitesses de translation d'un référentiel par rapport à un autre. Les équations satisfont donc au principe de relativité : deux référentiels en mouvement uniforme l'un par rapport à l'autre sont équivalents. Le principe de relativité a un status supérieur à celui d'une loi dans le sens où les lois de la physique qu'elles soient mécaniques électromagnétiques ou autres doivent satisfaire à ce principe.

Considérons un deuxième exemple avec cette fois des équations de champs. Celles qui donnent le potentiel gravitationnel d'une distribution de matière par exemple. Notons $\phi(t,\vec{x})$ le potentiel newtonien et $\mu(t.\vec{x},)$ la densité de masse. L'équation de Newton-Poisson est

$$\Delta\Phi = 4\pi G\mu. \tag{2.1.5}$$

Le potentiel permet de trouver la force gravitationnelle agissant sur une particule de masse m se trouvant en $\vec{x}$ à l'instant t

$$\vec{F} = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{x},t). \tag{2.1.6}$$

Sous une transformation de Galilée l'accélération est invariante et par conséquent la force aussi. Ceci est vérifié si $\Phi'(t',\vec{x}') = \Phi(t,\vec{x})$. Comme

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}', \partial_t = \partial_{t'} - \vec{V}.\vec{\nabla}', \tag{2.1.7}$$

l'équation dans le référentiel en mouvement uniforme est

$$\Delta'\Phi' = 4\pi G\mu'. \tag{2.1.8}$$

L'équation de Newton-Poisson est covariante sous la transformation de Galilée, elle a la même forme dans tous les référentiels d'inertie.

2.1.1 Exercices

1. Montrer que l'équation de diffusion

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n, \tag{2.1.9}$$

n'est pas covariante sous les transformations de Galilée.
2. Montrer que l'équation de continuité

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} j = 0, \tag{2.1.10}$$

est covariante si la densité de charge et la densité de courant se transforment comme

$$\rho' = \rho, \quad \vec{j}' = \vec{j} - \vec{V}\rho. \tag{2.1.11}$$

Réponses :

On utilise les équations (2.1.7) et $n = n'$ pour avoir

$$\frac{\partial n'}{\partial t'} - \vec{V}.\vec{\nabla}'n' = D\Delta'n'. \tag{2.1.12}$$

Une équation qui dépend explicitement de $\vec{V}$ et qui n'est pas de la forme d'une équation de diffusion. De même on trouve

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho'}{\partial t'} - \vec{V}.\vec{\nabla}'\rho', \tag{2.1.13}$$

et

$$\nabla.\vec{j} = \nabla'.(\vec{j}' + \vec{V}\rho') = \nabla'\vec{j}' + \vec{V}.\nabla'\rho'. \tag{2.1.14}$$

L'équation de continuité pour $(\rho, \vec{j})$ donne alors une équation de continuité pour $(\rho', \vec{j}')$. Cette équation est donc covariante.

Les exemples précédents semblent suggérer que les lois physiques doivent avoir le groupe Euclidien de Galilée comme groupe de symétrie. La non-covariance de l'équation de diffusion n'est pas en contradiction avec le principe de relativité car c'est une équation effective qui décrit la densité de particules dans le référentiel où les particules n'ont pas de direction privilégiée.

Notons qu'une transformation où les translations spatiales $\vec{a}$ et les rotations dépendent du temps ne laissent pas les équations invariantes ; elles génèrent dans les équations du mouvement d'une particule des forces d'inertie ou des pseudo-forces

$$\vec{F}_i = -m(\vec{\gamma} + 2\vec{w} \wedge \frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{w} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{x}) + \frac{d\vec{w}}{dt} \wedge \vec{x}), \tag{2.1.15}$$

où $\vec{\gamma}$ est l'accélération de translation et $\vec{w}$ la vitesse angulaire. Ces forces d'inertie ont en commun avec la force gravitationnelle leur dépendance linéaire en m, en particulier la force d'inertie dûe à une accélération uniforme est la même que la force gravitationnelle d'un champ uniforme. Cette remarque a joué un rôle important dans l'élaboration par Einstein de la relativité générale. Il l'a formulée comme un principe qu'il a baptisé « principe d'équivalence » : Un référentiel avec un champ gravitationnel uniforme et constant est équivalent à un référentiel sans champ gravitationnel mais en mouvement accéléré et uniforme par rapport à un référentiel d'inertie.

2.2 Relativité restreinte

Elle est le résultat de la compatibilié entre le principe de relativité et les équations de Maxwell. Nous allons donc supposer valides les équations de Maxwell dans tous les référentiels d'inertie mais nous allons abandonner les transformations de Galilée pour décrire le passage entre deux tels référentiels. En pratique, nous allons d'abord extraire des équations de Maxwell la constance de la vitesse de la lumière et nous allons trouver les transformations qui laissent cette vitesse invariante. Les transformations de Galilée sont remplacées par d'autres transformations quadri-dimensionnelles : les transformations de Lorentz. Ces transformations ne laissent pas le temps invariant. Dans le chapitre 5 nous verrons, grâce au formalisme tensoriel que nous développerons au chapitre 3, que la totalité des équations de Maxwell est invariante sous ces nouvelles transformations.

2.2.1 Principe de relativité et transformations de Lorentz

Ce principe dit que les lois de la physique exprimées dans deux référentiels R et R' en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre sont identiques. Une des conséquences des équations de Maxwell est que la lumière se déplace à une vitesse constante c. Sous une transformation de Galilée les vitesses s'additionnent, les équations de Maxwell ne sont donc pas invariantes sous les transformations de Galilée. Les transformations de Lorentz sont, par définition, les changements de coordonnées qui laissent invariantes la vitesse de la lumière et qui se réduisent aux transformations de Galilée dans le cas des vitesses faibles par rapport à c. Soit $x^i, i = 1, 2, 3$ les coordonnées cartésiennes dans R et $x^0 = ct$ le temps. On dit que $x^\mu,\ \mu = 0, 1, 2, 3$ sont les 4-coordonnées ou coordonnées tout court et ($x^i, i = 1, 2, 3$ les coordonnées spatiales) dans R.

La trajectoire d'un rayon de lumière est donnée par $\vec{x}(t)$, la vitesse par $\frac{d\vec{x}}{dt}$, le carré du module de la vitesse est donc

$$\frac{d\vec{x}}{dt}.\frac{d\vec{x}}{dt} = c^2 \tag{2.2.1}$$

ou bien

$$\sum_{i=1}^{3} dx^i dx^i = (dx^0)^2. \tag{2.2.2}$$

Si l'on introduit la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ définie par

$$\eta_{\mu\nu} = 0 \quad si \quad \mu \neq \nu, \quad \eta_{00} = -1, \quad \eta_{ii} = 1, \tag{2.2.3}$$

l'égalité entre la vitesse de la lumière et c s'écrit

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{3} dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\nu = 0. \tag{2.2.4}$$

Désormais nous allons utiliser la convention d'Einstein selon laquelle deux indices, dont l'un est en haut et l'autre en bas, sont sommés sans l'écriture du signe somme $\sum$, par exemple l'équation (2.2.4) s'écrit

$$dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\nu = 0. \tag{2.2.5}$$

Soit R' un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à R avec une vitesse $\vec{V}$ et soit x'^μ les coordonnées dans R', on voudrait trouver x'^μ en fonction de x^μ de telle sorte que la vitesse de la lumière soit c dans R'. C'est-à-dire que l'on doit avoir

$$dx'^\mu \eta_{\mu\nu} dx'^\nu = 0, \tag{2.2.6}$$

si

$$dx^\mu \eta_{\mu\nu} dx^\nu = 0. \tag{2.2.7}$$

Or

$$dx'^\mu \eta_{\mu\nu} dx'^\nu = \partial_\alpha x'^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_\beta x'^\nu dx^\alpha dx^\beta. \tag{2.2.8}$$

Si l'on remplace dx^0 par $\sqrt{\vec{dx}.\vec{dx}}$ et on utilise le fait que dx^i est arbitraire la relation (2.2.6) donne

$$\partial_0 x'^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_i x'^\nu = 0, \quad \partial_i x'^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_j x'^\nu + \partial_0 x'^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_0 x'^\nu \delta_{ij} = 0. \tag{2.2.9}$$

Ces relations s'écrivent comme

$$\partial_\alpha x'^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_\beta x'^\nu = \Omega \eta_{\alpha\beta}, \qquad (2.2.10)$$

où Ω est une fonction de x et de $\vec{V}$. En fait cette fonction ne peut dépendre de x car cette dépendance violerait l'homogénéité de l'espace-temps, de même elle ne peut dépendre de la vitesse $\vec{V}$ qu'a travers son module pour maintenir l'isotropie de l'espace[1]. Et comme la transformation avec une vitesse $-\vec{V}$ doit donner la transformation inverse on doit avoir $\Omega(-\vec{V}) = \Omega(\vec{V})^{-1}$, l'isotropie donne alors $\Omega = \pm 1$. La continuité donne alors $\Omega = 1$. Finalement, les transformations cherchées sont caractérisées par

$$\partial_\alpha x'^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_\beta x'^\nu = \eta_{\alpha\beta}. \qquad (2.2.11)$$

Ces transformations forment un groupe et sont continues.

2.2.2 Transformations infinitésimales

Considérons une transformation infinitésimale $x' = x + \xi$ avec ξ très petit. On obtient alors au premier ordre

$$\partial_\alpha \xi^\mu \eta_{\mu\beta} + \partial_\beta \xi^\nu \eta_{\nu\alpha} = 0. \qquad (2.2.12)$$

Définissons alors $\xi_\beta \equiv \xi^\mu \eta_{\mu\beta}$, l'égalité précédente implique alors que la matrice $\partial_\alpha \xi_\beta$ est antisymétrique :

$$\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha = 0. \qquad (2.2.13)$$

Une dérivée par rapport à x^γ et l'utilisation une seconde fois de la relation (2.2.12) donne alors

$$\partial_\alpha (\partial_\gamma \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\gamma) = 0 = 2\partial_\alpha \partial_\gamma \xi_\beta, \qquad (2.2.14)$$

autrement dit $\partial_\alpha \xi_\beta$ ne dépend pas de x. La solution pour ξ_α est alors

$$\xi_\alpha = a_\alpha + a_{\alpha\beta} x^\beta, \qquad (2.2.15)$$

avec a_α quatre constantes et $a_{\alpha\beta}$ une matrice antisymétrique. Les a^α décrivent les translations, la matrice antisymétrique contient les transformations de Lorentz. L'ensemble des deux forme le groupe de Poincaré. Celui-là remplace donc le groupe Euclidien comme groupe de symétrie des lois de la physique.

Une transformation de Lorentz finie s'obtient comme une succession de transformations infinitésimales. Il est donc possible de la déterminer à partir de (2.2.15) avec $a_\alpha = 0$, mais nous allons procéder différemment.

1. Les transformations avec Ω ne vérifiant pas nécessairement ces propriétés forment le groupe conforme qui est l'objet de l'exercice (2.4.10).

2.2.3 Transformations finies

Comme les transformations infinitésimales sont linéaires, les transformations finies le sont aussi car la composée de deux transfomations linéaires l'est aussi. Elles sont donc de la forme

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{2.2.16}$$

où Λ est une matrice 4×4. En notation matricielle on écrit $x' = \Lambda x$. Le fait que la vitesse de la lumière ne dépende pas du référentiel d'inertie s'exprime par le fait que lorsque $dx^{\mu} dx^{\nu} \eta_{\mu\nu} = 0$ alors $dx'^{\mu} dx'^{\nu} \eta_{\mu\nu} = 0$. Comme $dx'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} dx^{\nu}$ alors $dx'^{\mu} dx'^{\nu} \eta_{\mu\nu}$ est un polynôme du second degré en dx^{μ} qui s'annule lorsque $dx^{\mu} dx^{\nu} \eta_{\mu\nu} = 0$. Deux polynômes qui ont les mêmes zéros sont proportionnels donc

$$dx'^{\mu} dx'^{\nu} \eta_{\mu\nu} = \alpha(\vec{V}) dx^{\mu} dx^{\nu} \eta_{\mu\nu}, \tag{2.2.17}$$

où α est une constante indépendante des x mais qui peut dépendre de la vitesse de translation de R' par rapport à R. Déterminons d'abord $\alpha(\vec{V})$. L'invariance par rotation implique que α dépend seulement du module de $\vec{V}$. Comme $\alpha(-\vec{V})\alpha(\vec{V}) = 1$ puisque R est lié à R' par $-\vec{V}$ on a $\alpha^2(V) = 1$. Pour des vitesses faibles, la transformation doit être proche de l'identité et α proche de 1, finalement $\alpha = 1$. En résumé, la constance de la vitesse de la lumière implique que

$$dx^{\mu} dx^{\nu} \eta_{\mu\nu} = dx'^{\mu} dx'^{\nu} \eta_{\mu\nu}, \tag{2.2.18}$$

on appelle $ds^2 = dx^{\mu} dx^{\nu} \eta_{\mu\nu}$ la distance au carré entre les évènements dont les coordonnées diffèrent de dx^{μ}. On dit que la transformation de Lorentz Λ laisse invariante la distance relativiste :

$$dx^T \eta dx = dx^T \Lambda^T \eta \Lambda dx, \tag{2.2.19}$$

ou bien

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{2.2.20}$$

Les transformations de Lorentz sont par définition les matrices 4×4 qui satisfont à la relation (2.2.20). Elle forment un groupe noté $O(1,3)$.

En résumé, le principe de la relativité et la constance de la vitesse de la lumière sont compatibles si deux évènements dans R et R' sont liés par une transformation de Lorentz.

Comme exemple d'une transformation de Lorentz considérons le cas où la vitesse est dirigée selon x. Alors la partie non-triviale de Λ est une matrice 2×2

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{2.2.21}$$

L'équation $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ donne $b^2 - a^2 = -1, -c^2 + d^2 = 1, ac = bd$. La solution (avec $\Lambda^0_0 > 0$ et donc pas d'inversion du temps) s'écrit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.2.22}$$

Le paramètre α est déterminé par la trajectoire de l'origine de R' dans R $x^1 = Vt$ si $x'^1 = 0$ on a alors

$$\tanh\alpha = -\frac{V}{c}. \tag{2.2.23}$$

Utilisant la relation $1 - \tanh^2\alpha = 1/\cosh^2\alpha$ on déduit

$$\Lambda(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c} \\ -\frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2.24}$$

Notons que dans la limite des petites vitesses on retrouve les transformations de Galilée. Notons également que $\Lambda(-V) = \Lambda(V)^{-1}$. Dans la suite nous utiliserons souvent cette transformation spéciale de Lorentz et nous utiliserons les notations

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{V}{c}, \tag{2.2.25}$$

la transformation spéciale devient

$$\Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2.26}$$

2.2.4 Simultanéité

La conséquence la plus surprenante des transformations de Lorentz est peut-être que la notion de simultanéité dépend du référentiel. En effet si deux évènements sont simultanés dans le référentiel R et $\Delta x^0 = 0$ alors $\Delta x'^0 = -\beta\gamma\Delta x^1$, les deux évènements ne sont pas simultanés dans R' si $\Delta x^1 \neq 0$. Notons que l'on a $\Delta x'^1 = \gamma\Delta x^1$ et donc $\Delta x'^0 = -\beta\Delta x'^1$. Comme $|\beta| < 1$, les deux évènements simultanés dans R ne le sont pas dans R' mais vérifient $|\Delta x'^0| < |\Delta x'^1|$.

2.2.5 Dilatation des temps

Considérons une horloge en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse V dans le référentiel R. Dans le référentiel R' l'horloge est au repos, par exemple