

Chapitre I

Les outils de la mécanique des milieux continus

L'étude de la déformation à chaud des métaux requiert un minimum de notions de mécanique des milieux continus déformables. On se limitera dans ce chapitre à une description simple du formalisme nécessaire à la compréhension et à la modélisation des mécanismes physiques qui seront présentés par la suite. Le lecteur désireux d'approfondir ces aspects théoriques pourra consulter par exemple les ouvrages spécialisés de HILL [1950], GERMAIN [1986], CHABOCHE *ET AL.* [2009].

I.1 Vitesse de déformation et déformation

I.1.1 Définitions

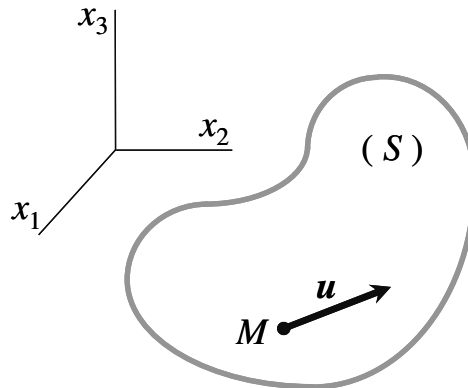


Figure I.1 Solide en cours de déformation

Considérons un solide (S) en cours de déformation (figure I.1). La vitesse \mathbf{u} d'un point quelconque M est fonction des trois coordonnées spatiales cartésiennes x_1 , x_2 et x_3 . Le tenseur *gradient de vitesse* est défini par :

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

où u_1 , u_2 et u_3 désignent les trois composantes du vecteur \mathbf{u} . (Les expressions de ce même tenseur en coordonnées cylindriques et sphériques sont données en Annexe I.5.1). Il est clair que $\nabla \mathbf{u}$ représente de manière exhaustive les variations du champ de vitesse dans le matériau. Toutefois, pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, seule la partie symétrique de ce tenseur caractérise les vitesses de déformation, ce qui amène à définir :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \tilde{\nabla} \mathbf{u}) \quad (\text{I.2})$$

où $\tilde{\nabla} \mathbf{u}$ désigne le tenseur transposé de $\nabla \mathbf{u}$. $\dot{\mathbf{E}}$ est dénommé *tenseur des vitesses de déformation* et s'écrit sous forme développée :

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

où les termes diagonaux et non diagonaux sont respectivement appelés *composantes axiales* et *composantes de cisaillement* (ou *vitesses de cisaillement*). On notera que les composantes du tenseur $\dot{\mathbf{E}}$ ont pour dimension l'inverse d'un temps. Elles seront habituellement exprimées en s^{-1} . Un parallélépipède d'axes parallèles aux axes de coordonnées et de longueurs respectives x_1 , x_2 et x_3 a pour volume $\Omega = x_1 x_2 x_3$. Par suite sa vitesse de variation de volume logarithmique est $\dot{\Omega}/\Omega = \dot{x}_1/x_1 + \dot{x}_2/x_2 + \dot{x}_3/x_3$, ou en introduisant les vitesses $u_i = \dot{x}_i$, $\dot{\Omega}/\Omega = u_1/x_1 + u_2/x_2 + u_3/x_3$. Lorsque x_1 , x_2 et x_3 sont infiniment petits, on peut écrire au premier ordre $u_i/x_i = \partial u_i / \partial x_i$ et par suite $\text{tr}(\dot{\mathbf{E}}) = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3 = \dot{\Omega}/\Omega$. Autrement dit, la trace du tenseur des vitesses de déformation est égale à la vitesse de

variation de volume logarithmique locale du matériau, que l'on notera $\dot{\epsilon}_v$. La déformation *plastique* ou *viscoplastique* des matériaux métalliques s'effectuant sans variation significative de volume, la trace du tenseur $\dot{\mathbf{E}}$ est nulle :

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = 0 \quad (\text{I.4})$$

Il en résulte que $\dot{\mathbf{E}}$ comporte 5 composantes indépendantes. On notera que la relation ci-dessus ne dépend pas du repère dans lequel les composantes du tenseur $\dot{\mathbf{E}}$ sont exprimées, la trace constituant le premier invariant de ce tenseur. Quant à la partie antisymétrique $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ de $\nabla \mathbf{u}$, généralement appelée *rotation de corps solide*, elle est associée aux *vitesse de rotation* locales des éléments de matière (cf. § II.2.5).

Afin de représenter la vitesse de déformation par une grandeur scalaire unique, on introduit la *vitesse de déformation équivalente (de von Mises)*, parfois appelée « vitesse de déformation généralisée », $\bar{\dot{\epsilon}}$ définie par la relation :

$$\bar{\dot{\epsilon}} = \left(\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \sum_{i,j} \dot{\epsilon}_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (\text{I.5})$$

où « : » désigne le produit doublement contracté de deux tenseurs et les indices i et j varient de 1 à 3. Cette grandeur est également indépendante du repère, car elle n'est fonction que du deuxième invariant $\sum_{i,j} \dot{\epsilon}_{ij}^2$ du tenseur $\dot{\mathbf{E}}$.

Elle mesure en quelque sorte l'« amplitude » de ce dernier.

La *déformation équivalente (de von Mises)*, parfois dénommée « déformation généralisée », $\bar{\epsilon}$ à l'instant t d'un élément de matière situé autour du point M est alors définie par l'intégrale :

$$\bar{\epsilon}(t) = \int_0^t \bar{\dot{\epsilon}}(t') dt' \quad (\text{I.6})$$

Cette grandeur *sans dimension* doit être calculée en suivant l'élément de matière dans son mouvement au cours du temps, comme le représente de manière schématique la figure I.2. Ainsi, si la trajectoire de M (cf. Annexe I.5.2) est déterminée par les trois fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$, la fonction à intégrer dans la relation (I.6) s'écrit sous la forme

$\dot{\bar{\epsilon}}[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$. Cette définition de la déformation équivalente appelle deux remarques :

(i) La déformation équivalente ne traduit pas systématiquement le changement de forme de l'élément de matière considéré : $\bar{\epsilon}$ étant strictement positive dès qu'une déformation se produit, $\bar{\epsilon}$ ne peut que croître au cours du temps. Ainsi, dans le cas d'une déformation alternée, qui ramène l'élément de matière à sa forme initiale, $\bar{\epsilon}$ n'est pas nulle. Plus généralement, pour un élément de matière subissant un changement de forme donné, $\bar{\epsilon}$ dépend du chemin suivi (cf. Annexe I.5.3). Il existe d'ailleurs un chemin de déformation particulier minimisant $\bar{\epsilon}$ [HILL, 1986 ; DAMAMME, 1978 ; MONTHEILLET ET REGAZZONI, 1979].

(ii) On peut se demander si $\bar{\epsilon}$ est liée à la densité de dislocations du matériau. Ceci semble vérifié dans le cadre des déformations à froid de faible amplitude, où ces deux grandeurs varient de manière proportionnelle. Ce n'est pas vrai en revanche dans le domaine de la déformation à chaud. Ainsi, lorsqu'un régime stationnaire est atteint (cf. CHAPITRE VI), $\bar{\epsilon}$ continue à augmenter alors que la densité de dislocations demeure constante.

On restera donc de manière générale très prudent en ce qui concerne l'interprétation physique de la déformation équivalente.

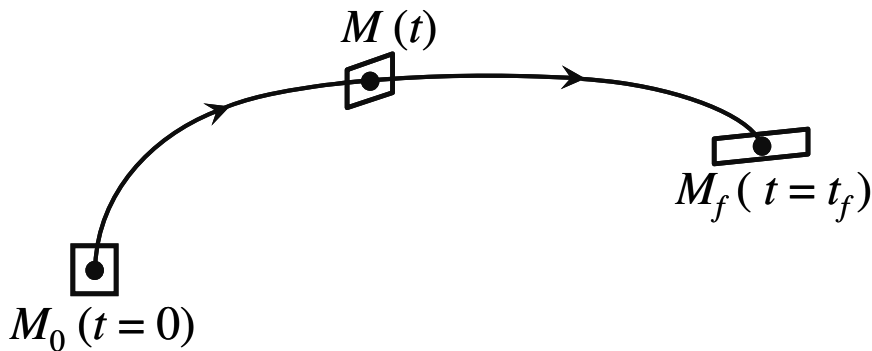


Figure I.2 Evolution d'un élément de matière situé au voisinage du point M au cours du temps, entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant final $t = t_f$

I.1.2 Trois chemins de déformation simples

Le *chemin de déformation* d'un élément de matière est défini par le tenseur des vitesses de déformation $\dot{\bar{\epsilon}}$, qui varie généralement au cours du temps (cf. § I.1.3). Nous nous limiterons dans cette section au cas plus simple où $\dot{\bar{\epsilon}}$

est constant. Il sera de plus supposé indépendant des variables d'espace ; la déformation est alors dite *uniforme* (ou *homogène*).

a) Déformation axisymétrique. Ce chemin de déformation correspond aux essais de traction et de compression uniaxiales, les plus fréquemment pratiqués en laboratoire, lorsque le matériau étudié est isotrope (figures I.3a et b). L'hypothèse de déformation uniforme et la définition (I.3) de $\dot{\mathbf{E}}$ impliquent que les composantes du vecteur vitesse \mathbf{u} sont des fonctions linéaires des variables d'espace. En traction, les conditions aux limites indiquées sur la figure I.3a permettent d'exprimer $u_3 = (V/L)x_3$ et par suite $\dot{\epsilon}_{33} = V/L$, où V désigne la vitesse de déplacement de la tête mobile de l'échantillon ($V > 0$) de longueur L . L'existence de l'axe de symétrie x_3 permet d'écrire $\dot{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}_{22}$, tandis que la propriété d'incompressibilité entraîne $\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33} = 0$. On en déduit $\dot{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}_{22} = (-1/2)\dot{\epsilon}_{33} = -V/2L$. Par ailleurs, les symétries du problème entraînent la nullité des composantes de cisaillement : $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Finalement, le tenseur des vitesses de déformation associé à l'essai de traction axisymétrique a pour expression dans les axes (x_1, x_2, x_3) :

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{V}{L} \quad (\text{I.7})$$

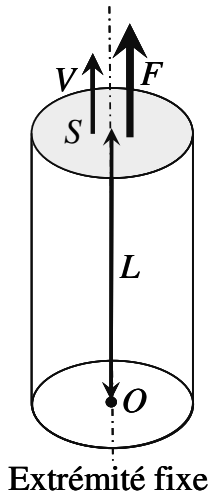
On en déduit à l'aide de la relation (I.5) la vitesse de déformation équivalente $\dot{\bar{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_{33} = V/L$ et, en se rappelant que $\dot{\mathbf{E}}$ ne dépend pas des coordonnées d'espace :

$$\bar{\epsilon} = \int_0^t \frac{V dt'}{L} = \int_{L_0}^{L_t} \frac{dL}{L} = \ln(L_t/L_0) \quad (\text{I.8})$$

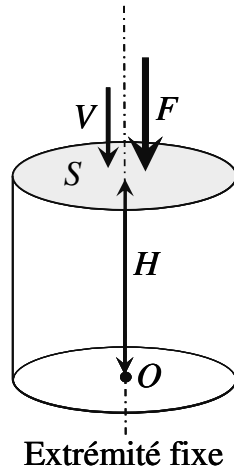
où L_0 et L_t désignent les longueurs de l'échantillon à l'instant initial et à l'instant t . Dans la pratique, on introduit souvent l'allongement global ΔL à l'instant t , tel que $L_t = L_0 + \Delta L$ ($\Delta L > 0$), d'où la relation :

$$\bar{\epsilon} = \ln(1 + e) \quad (\text{I.9})$$

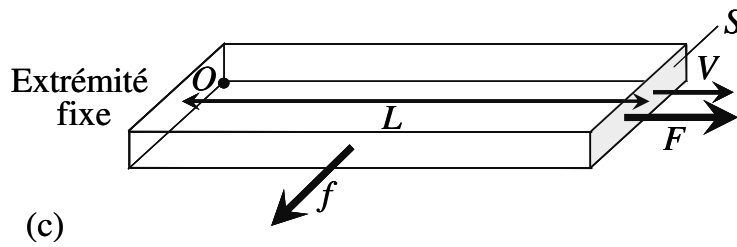
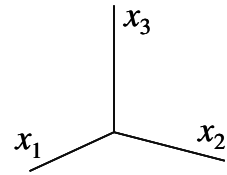
où $e = \Delta L/L_0$ désigne l'allongement relatif. On notera que la grandeur sans dimension e est usuellement exprimée en pourcent, contrairement à $\bar{\epsilon}$.



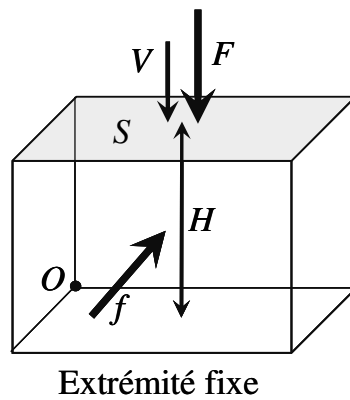
(a)



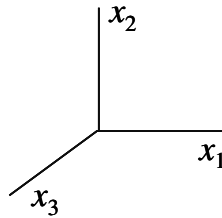
(b)

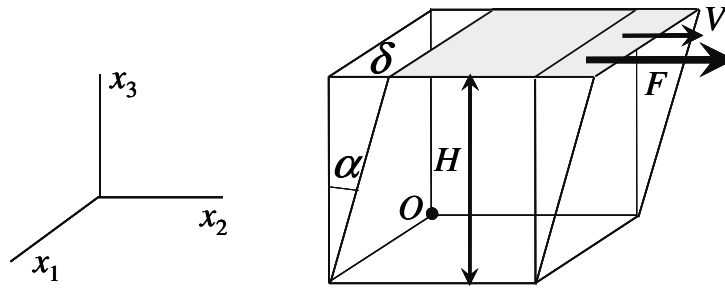


(c)



(d)





Extrémité fixe

(e)

Figure I.3 Représentation schématique des essais mécaniques les plus fréquemment utilisés : (a) traction uniaxiale ; (b) compression uniaxiale ; (c) traction plane ; (d) compression plane ; (e) cisaillement simple

Le coefficient $2/3$ introduit *a priori* de façon arbitraire dans la définition (I.5) trouve maintenant sa justification dans la relation (I.9) : il permet de faire coïncider, pour une déformation axisymétrique, la déformation équivalente $\bar{\varepsilon}$ avec la « déformation rationnelle » (ou « déformation vraie »), grandeur utilisée depuis longtemps en métallurgie. Dans la suite, on se contentera de la notation ε lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, notamment pour toutes les approches unidimensionnelles.

En compression axisymétrique (figure I.3b), la même démarche permet d'exprimer $u_3 = (V/H)x_3$, avec cette fois $V < 0$, et le tenseur des vitesses de déformation est à nouveau donné par l'expression (I.7) en remplaçant L par H . La vitesse de déformation équivalente (positive) s'écrit alors $\dot{\bar{\varepsilon}} = -\dot{\varepsilon}_{33} = -V/H$ d'où l'on déduit $\bar{\varepsilon} = \ln(H_0/H_t)$ où H_0 et H_t désignent les hauteurs de l'échantillon à l'instant initial et à l'instant t . Il est d'usage courant d'introduire la contraction globale ΔH à l'instant t , telle que $H_t = H_0 - \Delta H$ ($\Delta H > 0$), d'où l'expression analogue à (I.9) : $\bar{\varepsilon} = -\ln(1-c)$, où c désigne la contraction relative (positive) $\Delta H/H_0$.

b) Déformation axiale plane. Ce chemin de déformation se rencontre dans les essais de traction et de compression planes (figures I.3c et d). En utilisant à nouveau l'hypothèse d'uniformité de la déformation et les conditions aux limites, on obtient pour la traction (figure I.3c) $u_1 = (V/L)x_1$, d'où $\dot{\varepsilon}_{11} = V/L$ ($V > 0$). L'incompressibilité et l'hypothèse de déformation plane ($\dot{\varepsilon}_{33} = 0$) permettent alors d'écrire $\dot{\varepsilon}_{22} = -\dot{\varepsilon}_{11} = -V/L$. Compte tenu de la nullité des

composantes de cisaillement, le tenseur des vitesses de déformation a pour expression :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{V}{L} \quad (\text{I.10a})$$

et la vitesse de déformation équivalente s'écrit $\dot{\bar{\epsilon}} = (2/\sqrt{3})(V/L) = (2/\sqrt{3})\dot{\epsilon}_{11}$ soit $\dot{\bar{\epsilon}} \approx 1,15V/L$. On en déduit la déformation équivalente à l'instant t , soit $\bar{\epsilon} = (2/\sqrt{3}) \ln(L_t/L_0) = (2/\sqrt{3}) \ln(1+e)$, avec $e = \Delta L/L_0$, comme en traction uniaxiale.

En compression plane (figure I.3d), la vitesse est imposée suivant l'axe x_2 et $u_2 = (V/H)x_2$ avec $V < 0$. Le tenseur des vitesses de déformation est alors :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{V}{H} \quad (\text{I.10b})$$

et la vitesse de déformation équivalente a pour expression $\dot{\bar{\epsilon}} = (2/\sqrt{3})(-V/H) = (2/\sqrt{3})(-\dot{\epsilon}_{22})$. La déformation équivalente s'écrit donc $\bar{\epsilon} = (2/\sqrt{3}) \ln(H_0/H_t) = -(2/\sqrt{3}) \ln(1-c)$, avec $c = \Delta H/H_0$ comme en compression uniaxiale.

c) Cisaillement simple. Ce chemin de déformation est caractéristique de l'évolution d'un élément de matière dans l'essai de torsion (globalement non uniforme, cf. CHAPITRE IV), mais peut aussi être imposé de manière quasi uniforme à un échantillon de taille finie (figure I.3e). Il s'agit à nouveau d'une déformation plane ($\dot{\epsilon}_{11} = 0$), dans laquelle un élément de matière initialement en forme de parallélépipède rectangle de hauteur H se transforme en parallélépipède oblique, comme l'indique la figure. Le plan (x_1, x_2) et la direction x_2 sont appelés respectivement plan et direction de cisaillement. L'hypothèse d'uniformité permet d'exprimer les composantes du vecteur vitesse : $u_2 = \dot{\gamma}x_3$ et $u_1 = u_3 = 0$, où $\dot{\gamma} = V/L$ (> 0) est dénommé *vitesse de cisaillement*. On en déduit le tenseur des vitesses de déformation :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \dot{\gamma} \quad (\text{I.11})$$