

Table des matières

<i>Prérequis et notations</i>	11
<i>Introduction</i>	13
<i>CHAPITRE I : REFORMULATION DE LA GEOMETRIE CLASSIQUE DANS LE LANGAGE TENSORIEL</i>	17
I - Notion de Métrique	17
A/ Importance du triangle	17
B/ De la géométrie du triangle au produit scalaire	18
C/ Expression d'une métrique dans un espace quelconque	21
II - Propriétés du tenseur métrique g_{ij}	22
A/ Régularité de la matrice $[g_{ij}]$	22
B/ Caractère intrinsèque du signe de g	23
C/ Existence du tenseur g^{ij} dual de g_{ij}	24
D/ Différentielle du tenseur métrique	24
a) Identités de Ricci	24
b) Différentielle de g_{ij}	25
c) Commutativité de la dérivation et de l'abaissement ou l'élévation d'un indice	26
Exercices	27
Solution des exercices	28
Résumé du chapitre I	38
<i>CHAPITRE II : LE PASSAGE AUX GÉOMÉTRIES PSEUDO-EUCLIDIENNES</i>	41
I - Notion de Métrique	41
A/ La géométrie du cylindre	41
B/ La géométrie de la sphère	43
II - Espaces euclidiens ou pseudo-euclidiens	46
A/ Espace vectoriel euclidien ou pseudo-euclidien	46
B/ Espace ponctuel euclidien ou pseudo-euclidien	48
III - Propriétés de la métrique d'un espace ponctuel pseudo-euclidien	52
IV - Recherche de bases orthogonales dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{E}_n	53
A/ Problème	53
B/ Procédé d'orthogonalisation	54
V - Normalisation d'une base orthogonale	62

VI - Signature de l'espace \mathbb{R}^n ou \mathbb{E}^n	62
A/ Définition	62
B/ Propriété d'invariance	63
VII - Réduction du produit scalaire à un sous-espace vectoriel	65
A/ Axiomes du produit scalaire et matrice $[g_{ij}]$	65
B/ Sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n	66
C/ Cas d'un espace pseudo-euclidien	66
D/ Cas d'un espace euclidien	67
VIII - Expression des coefficients de Christoffel. Application au calcul différentiel	70
A/ Calcul des coefficients de Christoffel à partir du tenseur métrique	70
B/ Calcul de divergence, gradient, laplacien	72
a) Divergence de $\vec{V}(M) \in \mathbb{R}^n$	72
b) Gradient de $\varphi(M)$	73
c) Laplacien de $\varphi(M)$	73
Exercices	73
Solution des exercices	74
Résumé du chapitre II	80
<i>CHAPITRE III : LES GÉOMÉTRIES RIEMANNIENNES</i>	81
I - Les espaces ponctuels de Riemann	81
A/ Importance de la notion d'image tangente	81
B/ Image tangente en un point d'un espace ponctuel	83
C/ Champs de tenseurs dans un espace ponctuel ; nécessité d'une connexion affine	84
D/ Définition des $d\vec{e}_i$ en géométrie riemannienne	85
a) Problème	85
b) Les $d\vec{e}_i$ en géométrie euclidienne ou pseudo-euclidienne	85
c) Extension aux géométries riemanniennes	86
d) La connexion affine en géométrie riemannienne	89
e) Définition d'un espace ponctuel de Riemann ; terminologie associée	90
II - Essai de développement d'un espace de Riemann sur un espace pseudo-euclidien ; notion de courbure	92
A/ Problème	92
B/ Construction d'une image de \mathbb{E}_n sur \mathbb{E}_{eucl}	92
a) Conditions nécessaires d'obtention d'une image	92
b) Construction de l'image	93
c) Propriétés métriques de l'image	95
C/ Condition d'applicabilité métrique	96

D/ Le tenseur de Riemann-Christoffel, ou tenseur de courbure	98
E/ Propriétés du tenseur de courbure	101
a) Symétrie et antisymétrie des composantes	101
b) Nombre de composantes indépendantes du tenseur de courbure	104
F/ Formes contractées du tenseur de courbure	105
a) Contraction de deux indices	105
b) Contraction complète du tenseur de courbure	106
III - Les géodésiques dans un espace de Riemann	107
A/ Cas des espaces ponctuels euclidiens	107
B/ Nouvelle interprétation des géodésiques en espace euclidien	118
C/ Généralisation aux espaces pseudo-euclidiens et riemanniens	119
D/ Etude détaillée des géodésiques	120
a) Problème de continuité de la vitesse sur les géodésiques	120
b) Problème de l'annulation du ds^2	121
c) Cas général : signe du ds^2	122
E/ Recherche du repère géodésique local « le plus euclidien possible »	124
IV - Variation d'un tenseur ; intégration le long d'une courbe	127
A/ Transport parallèle ou translation en espace euclidien	127
B/ Généralisation aux espaces de Riemann	130
a) Transport parallèle dans le voisinage d'un point	130
b) Variation d'un champ vectoriel ou tensoriel au cours d'un déplacement d'ordre 1	132
c) Invariance du produit scalaire par transport parallèle	135
d) Variation d'un champ tensoriel au cours d'un déplacement fini	135
α) Expérience imaginaire	136
β) Expression de la variation le long d'une courbe	138
γ) Transport parallèle de la base d'origine sur une courbe	143
δ) La signature de l'espace comme propriété intrinsèque	144
e) Condition d'unicité de la variation d'un tenseur entre deux points	144
f) Quelques relations utiles pour les calculs	148
α) Commutateur de la dérivée seconde covariante	148
β) Identités de Bianchi	150
γ) Dérivée covariante du tenseur métrique	151
Exercices	153
Solution des exercices	155
Résumé du chapitre III	173
CHAPITRE IV : LA CINQUIÈME DIMENSION : SCIENCE-FICTION OU RÉALITÉ ?	177
I - Question philosophique, physique, et mathématique	177

II - Formulation mathématique du problème	178
A/ Retour à la sphère	178
B/ Généralisation	178
a) Construction d'une image...	178
b) ...en vraie grandeur	179
c) Interprétation de g'_{ij}	180
III - Les étapes de la recherche	182
IV - Détermination de X^{n+1}	183
V - Détermination de X^I	187
VI - Existence des solutions en fonction de n	189
A/ Cas $n = 1$	190
B/ Cas $n = 2$	190
C/ Cas $n = 3$	191
D/ Cas $n \geq 4$	194
Exercices	195
Solution des exercices	196
Résumé du chapitre IV	207
Annexe 1 : L'intégrale de volume en espace riemannien	209
I - Notion de volume dans un espace euclidien	209
A/ Le parallélépipède comme figure fermée	210
B/ Isométrie de deux domaines fermés	211
C/ Notion de volume	211
a) Volume du parallélépipède rectangle	212
b) Volume d'un parallélépipède quelconque	212
D/ Intégrale de volume en espace euclidien	217
II - Généralisation aux espaces pseudo-euclidiens et riemanniens	218
Annexe 2 : Le cas historique des géométries de Lobatchevski-Bolyai et de Riemann	223
Bibliographie sommaire	235

Complément divertissant ... et instructif

**Les mauvais tours et les enseignements
d'un disque relativiste en rotation**

<i>Avant-propos</i>	239
<i>1ère partie : Ce qui ne tourne pas rond</i>	243
I - Le problème du disque tournant	243
A/ Exercice	243
B/ Solution	244
C/ Le doute	246
II - Les différentes évaluations d'une longueur	246
A/ La méthode télémétrique	246
B/ La méthode par arpentage	250
C/ La méthode de minimisation	257
1) Coordonnées d'un point et paramétrage d'une courbe	258
2) Equations de minimisation	258
3) Recherche préliminaire	259
4) Solution $K = 0$	261
5) Solutions $K \neq 0$	261
a) \dot{r} ne s'annule pas sur (\mathcal{C}_0)	264
b) \dot{r} s'annule une fois sur (\mathcal{C}_0)	270
6) Remarques sur les solutions obtenues	273
<i>2ème partie : Pourquoi cela ne tourne pas rond</i>	277
I - Le débat	277
II - Le problème de la forme	279
III - Sens et contre-sens	281
IV - De la cohérence d'une définition	283
A/ Rappels sur certains principes « classiques »	283
B/ De l'utilisation correcte des dits principes	285

3ème partie : Pour que cela tourne rond... même dans le Cosmos	293
I - Coordonnées et distances	293
II - Coordonnées en géométrie classique	294
A/ Systèmes réguliers de coordonnées	294
B/ Expression de la métrique	295
C/ Changement de coordonnées	296
D/ Repères et référentiels	298
E/ Temps, mouvement, mécanique	298
F/ Changements de repère et de référentiel	299
III - Le passage à la relativité	300
A/ Espace, Temps, Espace-Temps	301
B/ Un nouvel absolu : le ds^2	301
C/ Espace-temps, temps, espace	302
D/ Tentative d'application au disque tournant	304
E/ Le test du rayon de courbure	310
F/ Coordonnées locales et coordonnées universelles	312
1) Coordonnées locales	312
a) Tentative d'intégration injustifiée	313
b) Conséquences d'une extrapolation abusive	314
2) Coordonnées universelles	317
IV - Implications en cosmologie	319
A/ Les modèles cosmologiques	320
B/ L'Univers a de la chance...	321
C/ Sinon...	322
Annexe 1 : Les malheurs du voyageur de Langevin	323
Annexe 2 : La tige rigide en mouvement de translation accéléré	333
Annexe 3 : Le problème des étalons	341
Annexe 4 : Les tétrades de Fermi-Walker	351
I - Direction fixe par rapport aux étoiles lointaines	351
II - Application aux tétrades de Fermi-Walker	355
III - Généralisation à un observateur quelconque	363
Bibliographie sommaire	371