CHAPITRE I

REFORMULATION DE LA GEOMETRIE CLASSIQUE DANS LE LANGAGE TENSORIEL

I - Notion de Métrique

Même si le lecteur est tout-à-fait familiarisé avec les techniques de calcul sur les champs de tenseurs en coordonnées curvilignes *dans l'espace de la géométrie habituelle*, nous rappellerons ici quelques notions « évidentes » relativement à cette dernière. Il convient en effet d'en avoir une idée bien présente car le but de ce livre est de franchir le pas au chapitre III — après y avoir été préparé au chapitre II — vers des géométries différentes dans lesquelles certaines de ces « évidences » pourront être tranposées sans dommage alors que d'autres devront disparaître et laisser place à de nouvelles propositions.

A/ Importance du triangle

Comme nous l'avons vu en introduction, la géométrie étudie principalement les « figures », des plus simples aux plus compliquées, en s'intéressant notamment à leur forme et à leurs propriétés « quantitatives » ou métriques (longueurs, angles, surfaces, volumes). Afin de ne pas alourdir l'exposé on admettra qu'on a adopté une fois pour toutes un *étalon de longueur*. Ainsi nous pourrons d'emblée considérer les longueurs comme des **sclaires intrinsèques**. Les *mesures d'angle* seront aussi assorties d'une unité, comme le radian ou encore l'une des unités utilisées par les géomètres praticiens (degré ou grade).

La figure la plus simple est la « ligne » qui, vue dans l'espace plan ou l'espace « complet », présente diverses formes, parmi lesquelles on trouve le cas important de la « ligne droite ». Une telle ligne constitue, du point de vue de la mesure, un espace ponctuel à une dimension le long de laquelle on ne peut définir que la *longueur* comme grandeur métrique. Si on passe ensuite au plan (espace à deux dimensions), une droite sépare celui-ci en deux demi-plans rigoureusement équivalents. Si on veut effectuer une séparation plus générale du plan en deux portions éventuellement différentes il faudra remplacer *la* droite par *deux* droites ou plus exactement par *deux demi-droites*. Les deux portions de plan limitées par ces demi-droites sont des *angles*. En modifiant la position relative des demi-droites on constate qu'on peut rendre les deux portions plus ou moins « vastes », leur réunion donnant toujours le plan de départ. Cela amène à associer à chacun des angles une **mesure** θ telle que la somme des deux mesures reste égale à une constante (2π radians). Mais bien que la mesure des angles reste finie, les deux portions d'espace ainsi limitées sont infinies en ce sens que chacune contient des points séparés par une distance (longueur) infinie. Pour délimiter une portion finie du plan il faut « fermer » le plus petit des deux angles ($\theta < \pi$) par une troisième droite, et on obtient alors une nouvelle figure bien connue appelée **triangle**. Il s'agit donc de la « figure finie » la plus simple que l'on puisse définir dans le plan. On sait que les propriétés métriques d'un triangle (par exemple son aire, ou surface) sont entièrement déterminées dès lors qu'on connaît les longueurs de ses trois côtés ou, ce qui revient au même mais s'avère en général plus commode, deux de ses côtés ainsi que l'angle des demi-droites qu'ils déterminent. Par suite, comme le savent bien les maîtres de l'art, l'analyse métrique des figures du plan les plus compliquées peut se faire par **triangulation**, c'est-à-dire par division des dites figures en triangles. Bien entendu, la représentation d'une figure limitée par une courbe nécessitera un passage à la limite en faisant apparaître à la frontière des triangles de plus en plus petits (problème de « rectification » de la courbe), mais la technique de base reste la triangulation. Le fait de calculer une surface par un découpage en petits parallélogrammes « élémentaires » n'est en fait qu'un raccourci de calcul commode puisque chaque parallélogramme peut lui-même être subdivisé en deux triangles.

Si maintenant on passe à l'espace complet de la géométrie classique, aux notions métriques précédentes (longueur, angle, surface) s'ajoute celle de volume. Là encore le cas le plus compliqué se ramènera, éventuellement avec un passage à la limite, à un découpage faisant appel au volume le plus simple appelé **tétraèdre** ou **pyramide à base triangulaire**. Nous reverrons plus loin, dans le complément sur l'intégrale de volume, qu'on utilise en fait le « pavé » mais ce dernier peut être subdivisé en quatre tétraèdres. Or le tétraèdre est lui-même limité par quatre triangles.

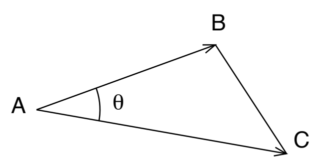
> *On voit donc que c'est finalement la géométrie du triangle qui constituera l'ingrédient fondamental de toute étude métrique.*

B/ De la géométrie du triangle au produit scalaire

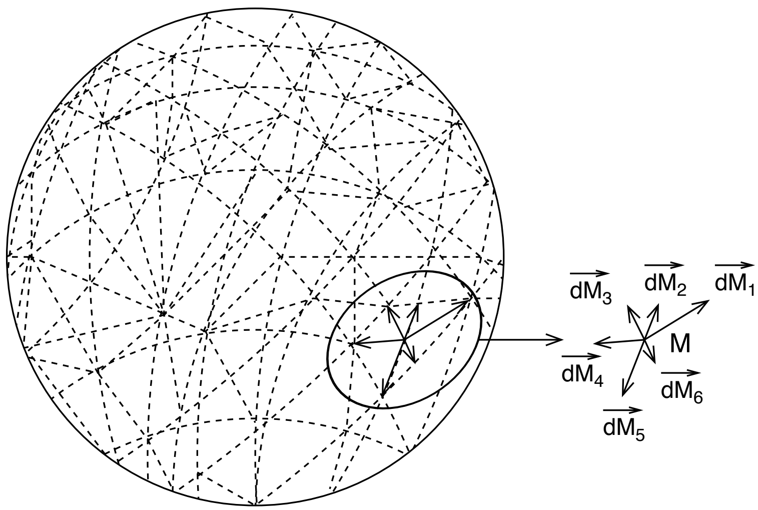
Comme nous l'avons rappelé ci-dessus, les caractéristiques métriques d'un triangle sont entièrement déterminées par la donnée de trois nombres qui sont, au choix, soit des longueurs des trois côtés, soit celles de deux côtés et l'angle qu'ils forment, soit encore deux angles et leur côté commun. Nous adopterons le deuxième choix car c'est celui qui se prête le mieux à la représentation vectorielle, base du calcul tensoriel qui nous intéresse dans cet ouvrage.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que la gestation de la notion de vecteur a été lente, et que son entrée dans les mœurs s'est longtemps heurtée à la méfiance et au poids des habitudes. Ce concept, timidement amené par Hamilton puis développé et conceptualisé surtout par Grassmann au XIX^e siècle, constituait un progrès par rapport à la géométrie analytique de Descartes dont les calculs étaient souvent compliqués. Il introduisait en effet les **grandeurs intrinsèques**, dont les propriétés établies une fois pour toutes n'avaient plus besoin d'être retrouvées par des calculs laborieux dans tel ou tel repère cartésien. Il en a été de même avec la notion de tenseur qui, après son introduction par Voigt, a été développée, enrichie — notamment par Einstein, Ricci, Levi-Civita, Christoffel, Cartan, et bien d'autres — et rendue extraordinairement efficace... à condition de bien vouloir profiter de toutes ces améliorations. C'est peut-être dans un XXI^e siècle bien avancé qu'on verra enfin se généraliser un usage correct de l'écriture des indices conformément à la variance, et que certains tenseurs d'ordre 2 ne seront plus ramenés à une suite à un seul indice réduisant à néant toute l'efficacité du calcul tensoriel...

Un triangle est entièrement déterminé si on se donne, au choix, deux vecteurs ayant une origine commune et définissant deux de ses côtés. On retrouve bien en effet les longueurs des côtés à partir des normes des vecteurs ($\ell_1 = \mid \overrightarrow{AB} \mid$, et $\ell_2 = \mid \overrightarrow{AC} \mid$), ainsi que l'angle θ qu'ils forment. Le troisième côté apparaît d'ailleurs en joignant les extrémités des deux vecteurs :



On sait qu'on peut associer à ces deux vecteurs un nombre intrinsèque appelé leur « produit scalaire » et défini par : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \mid \overrightarrow{AB} \mid\mid \overrightarrow{AC} \mid \cos\theta$. Les normes des vecteurs sont elles-mêmes liées à leur carré scalaire, si bien que la donnée des trois scalaires $\overrightarrow{AB}^2$, $\overrightarrow{AC}^2$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ équivaut à celle des deux longueurs ℓ_1 , ℓ_2 et de l'angle θ . Il en résulte que les propriétés métriques du triangle sont entièrement déterminées par ces trois nombres. Par suite, la connaissance du produit scalaire de tout couple de vecteurs (les deux vecteurs étant identiques dans le cas du carré scalaire) il suffit à déterminer les caractéristiques métriques de n'importe quel triangle. Or, en pratique l'étude métrique d'une figure quelconque (par exemple le calcul de sa surface ou de son volume) se fait, comme nous l'avons dit, par triangulation avec éventuellement un passage à la limite, donc par un découpage en triangles « infinitésimaux ». Chaque point M à l'intérieur de la figure se trouvera donc « environné » de triangles construits sur des vecteurs $\overrightarrow{dM}$ de norme infinitésimale ayant ce point pour origine.



Lorsque le produit scalaire de tout couple de vecteurs infinitésimaux d'origine M est connu, on dit que la métrique est parfaitement *définie dans le voisinage de* M, ou de façon raccourcie, que la métrique est *définie* en M. En effet, deux vecteurs infinitésimaux d'origine M s'écrivant $\overrightarrow{dM}_1 = du^i \overrightarrow{e}_i$ et $\overrightarrow{dM}_2 = dv^i \overrightarrow{e}_i$ ont pour produit scalaire $\overrightarrow{dM}_1.\overrightarrow{dM}_2 = (du^i \overrightarrow{e}_i).(du^j \overrightarrow{e}_j) = g_{ij} du^i dv^j$, en posant $\overrightarrow{e}_i \overrightarrow{e}_j = g_{ij}$.

La métrique en M est alors entièrement explicitée quand on connaît la suite symétrique g_{ij} des produits scalaires des vecteurs d'une base choisie en ce point. Nous connaissons déjà une propriété tout-à-fait remarquable de cette suite, à savoir sa tensorialité : bien que sa définition fasse explicitement appel au choix d'une base, la suite g_{ij} définit à son tour un **élément intrinsèque** (c'est-à-dire existant « en soi », indépendamment du choix de la base) qui est le **tenseur** $g_{ij} e^{*i} \otimes e^{*j} \in \mathbb{R}^{*3} \otimes \mathbb{R}^{3*}$.

Suivant la convention habituelle on dira simplement « le tenseur g_{ij} ». Nous l'avions déjà introduit sous le nom de « tenseur fondamental ». Etant donnés sa définition et l'usage que nous en ferons par la suite, nous l'appellerons désormais **le tenseur métrique**.

La méthode de triangulation devant pouvoir être appliquée pour des figures d'extension quelconque, on explicitera un tenseur métrique en tout point de l'espace, ce qui en fait un champ de tenseur : $g_{ij}(M)$. Mais comme, d'une part, l'étude métrique de toutes les figures fait appel *au même tenseur métrique* en tout point, et que, d'autre part, ce tenseur est une grandeur intrinsèque, on peut dire qu'il traduit en fait les propriétés de l'espace lui-même en chacun de ses points :

> *Les propriétés métriques intrinsèques de l'espace peuvent être explicitées à l'aide du champ tensoriel $g_{ij}(M)$*

En théorie le choix de la base permettant de calculer g_{ij} est tout-à-fait arbitraire, et les bases adoptées en deux points différents peuvent n'avoir aucun lien entre elles. On se doute qu'un tel choix « aléatoire » risque de ne pas mener à des calculs particulièrement aisés ! C'est pourquoi on préférera introduire des bases reliées de façon simple de point en point. *En pratique on utilisera les bases naturelles associées à des systèmes de coordonnées curvilignes (dont les coordonnées rectilignes sont des cas particuliers).*

C/Expression d'une métrique dans un espace quelconque

L'espace dans lequel nous évoluons a des propriétés métriques « imposées par la nature » et décrites, conformément à ce que nous en percevons, par un système de lois comme les propositions et postulats d'Euclide. Par conséquent le tenseur métrique que nous y introduisons ne fait que traduire, expliciter, les dites propriétés métriques en chaque point. Mais on peut être amené, pour étudier les propriétés de différents systèmes physiques, à utiliser avec avantage des « espaces de configuration » abstraits, mathématiques, pouvant même avoir une dimension n différente de 3 (cependant nous n'aborderons pas les espaces de dimension infinie). Ces espaces n'ayant pas a priori une métrique imposée *de facto*, on pourra effectivement en *définir* une destinée à représenter les propriétés physiques du système étudié. Par exemple, un milieu optique est, physiquement parlant, « de l'espace ordinaire rempli de matière transparente ». Mais on peut le considérer formellement comme un espace ayant une géométrie telle que le « chemin optique » y remplace la longueur habituelle. L'indice de réfraction en chaque point interviendra donc dans la définition qui sera adoptée pour le tenseur métrique, et on peut s'attendre, dans le cas d'un milieu inhomogène, à rencontrer des propriétés géométriques différentes de celles de notre espace « euclidien ». Pour prendre un autre exemple signalons la révolution relativiste qui, selon les idées d'Einstein, considère que la « géométrie naturelle » d'Euclide n'est en fait qu'une approximation locale et que l'Univers dans son ensemble possède une géométrie plus générale qu'un espace à quatre dimensions. Le tenseur métrique qui y est alors introduit représente concrètement les propriétés physiques de l'Univers avec son « contenu ».
D'une façon générale on dira qu'on **définit une métrique** dans un certain espace de dimension n si **on se donne un tenseur métrique en chaque point** (champ de tenseur). Pour cela, ayant adopté un système de coordonnées

curvilignes (u^i), on se donnera $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions $g_{ij}(M)$ qui constitueront les composantes du tenseur métrique relativement à la base naturelle associée à ces coordonnées (la suite g_{ij} est symétrique). Compte tenu de l'interprétation de ce tenseur, la suite $g_{ij}(M)$ *définit* le produit scalaire en chaque point M des vecteurs de la base naturelle, et par suite de tout couple de vecteurs définis en ce point.
Un moyen courant d'expliciter les $g_{ij}(M)$ consiste à écrire la forme quadratique que constitue « l'élément linéaire »

$$\boxed{ds^2 = gij(M)\ du^i du^j}$$

représentant le carré scalaire d'un déplacement élémentaire $du^i\ \vec{e}_i(M)$ à partir de M.

II - Propriétés du tenseur métrique g_{ij}

A/Régularité de la matrice $[g_{ij}]$

Considérons le détermiant $g = det(g_{ij})$ et supposons qu'il soit nul : on peut donc récrire une ligne ou une colonne comme une combinaison linéaire des autres, par exemple : $g_{1j} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\ g_{ij} \quad \forall j$. Contractons les deux membres de cette égalité par la suite v^j des composantes d'un vecteur $\vec{V}$ **quelconque** :

$$g_{1j}\ v^j = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\ g_{ij}\ v^j \qquad \text{ou} \qquad (\vec{e}_1.\vec{e}_j)\ v^j = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\ (\vec{e}_i.\vec{e}_j)\ v^j.$$

Mais $\vec{e}_j\ v^j = \vec{V}$ donc : $\vec{e}_1.\vec{V} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\ \vec{e}_i.\vec{V} \implies$

$$(\ \vec{e}_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\ \vec{e}_i)\ .\ \vec{V} = 0 \quad \forall\ \vec{V}.$$

Ainsi le produit scalaire du vecteur $(\ \vec{e}_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\ \vec{e}_i)$ avec tout vecteur $\vec{V}$ est nul. Ce vecteur est donc nul conformément à un des axiomes du produit scalaire que nous reverrons plus loin. Dans ce cas, $\vec{e}_1$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de base, ce qui est faux.

L'indépendance linéaire des $\vec{e}_i$ assure la régularité de la matrice $[g_{ij}]$: $g = det(g_{ij}) \neq 0$.

B/ Caractère intrinsèque du signe de g

Nous savons maintenant que $g \neq 0$.
Considérons une autre base $\overrightarrow{E}_I = a^i_I \overrightarrow{e}_i$. Appelons Δ le déterminant de $[a^i_I]$. Cette dernière matrice est régulière car la transformation inverse existe, donc $\Delta \neq 0$.
Dans la nouvelle base le tenseur métrique s'écrit $G_{IJ} = a^i_I \; a^j_J \; g_{ij}$, avec $det(G_{IJ}) = G$.
Afin de faire apparaître plus nettement des produits de matrices nous allons changer provisoirement dans la notation la hauteur de certains indices pour récrire :

$$G^I{}_J = \widetilde{a}^I_i \; g^i{}_j \; a^j_J.$$

Pour inverser les indices de la matrice a^i_I nous avons introduit sa transposée $\widetilde{a}^I_i$ qui a le même déterminant Δ. Lexpression obtenue correspond à un produit de matrices :
$[G] = [\widetilde{a}] \; [g] \; [a]$, et le déterminant de la matrice-produit étant égal au produit des déterminants de chacun des facteurs, on en déduit :

$$\boxed{G = \Delta^2 \; g}$$

Comme Δ et g sont non nuls, le déterminant de $[G_{IJ}] = G$ est lui aussi non nul. Mais surtout, Δ^2 étant strictement positif, il en résulte que G et g sont de même signe.

Le signe de g est une caractéristique de l'espace attachée à sa métrique g_{ij}.

Nous verrons plus loin que cette propriété est extrêmement intéressante.
Il suffit pour connaître le signe de g, de calculer le déterminant dans une base particulière, par exemple dans une base orthogonale (nous verrons que c'est toujours possible). Dans ce cas $g_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et la matrice est diagonale. Son déterminant est le produit des éléments diagonaux : $g = \Pi \; (\overrightarrow{e}_i)^2$.
Dans un espace euclidien, comme dans l'espace de la géométrie classique, on a toujours $(\overrightarrow{e}_i)^2 > 0$, donc g est positif. Mais cette propriété pourra être mise en défaut dans des espaces non-euclidiens.

Nous allons au passage introduire deux définitions :
Un scalaire, fonction de la base en M, qui par changement de base se trouve *multiplié* par Δ^n est dit **n fois comodulaire**.
Un scalaire, fonction de la base en M, qui par changement de base se trouve *divisé* par Δ^n est dit **n fois contramodulaire**.

Il est évident que le produit d'un scalaire n fois comodulaire par un scalaire n fois contramodulaire donne un scalaire intrinsèque.

Le déterminant de la matrice associée au tenseur métrique est 2 fois comodulaire.

C/ Existence du tenseur g^{ij} dual de g_{ij}

La matrice $[g_{ij}]$ étant régulière, elle admet une matrice inverse notée $[g^{ij}]$. Nous savons déjà que la suite de ses éléments est tensorielle :
$g^{ij}\ \overrightarrow{e}_i \otimes \overrightarrow{e}_j \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$.
Mais g_{ij} étant un champ de tenseur, il en est de même pour g^{ij} :
$g^{ij} = g^{ij}(M)$.
Tout ce qui a été dit sur ces deux tenseurs reste valable en tout point M. Par exemple, l'abaissement ou l'élévation des indices peut s'effectuer en tout point :
$v_i(M) = g_{ij}(M)\ v^j(M)$
$tij_k(M) = g^{ih}(M)\ {t_h}^j{}_k(M)$, etc...

D/ Différentielle du tenseur métrique

On connaît la définition générale de la différentielle d'un champ de tenseur : lorsqu'on effectue un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dM} = \overrightarrow{MM'}$, un tenseur $T(M)$, représenté par ses composantes $t^i{}_j(M)$, subit un accroissement au premier ordre qu'on peut écrire en le développant dans la base définie au point M :
$dT = \nabla t^i{}_j(M)[\overrightarrow{e}_i\ \otimes\ e^{*j}](M)$ avec $\nabla t^i{}_j = \nabla_k t^i{}_j\ du^k$, et
$\nabla_k t^i{}_j = \partial_k t^i{}_j + t^h{}_j \Gamma^i_{hk} - t^i{}_h \Gamma^h_{jk}$

Rappelons qu'il figure autant de termes en Γ qu'il y a d'indices dans le tenseur, le signe de chaque terme étant associé à la hauteur de l'indice correspondant. Nous allons maintenant déterminer la différentielle du tenseur métrique.

a) Identités de Ricci

Calculons l'accroissement au premier ordre des composantes du tenseur métrique, lorsqu'on effectue un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dM}$:
$dg_{ij} = d(\overrightarrow{e}_i.\overrightarrow{e}_j) = d\overrightarrow{e}_i\ .\ \overrightarrow{e}_j + \overrightarrow{e}_i\ .\ d\overrightarrow{e}_j$.
Mais nous savons qu'on peut expliciter les $d\overrightarrow{e}_i$ dans tout système de coordonnées curvilignes à l'aide des coefficients de Christoffel associés :
$d\overrightarrow{e}_i = \Gamma^\ell_{ik}\ \overrightarrow{e}_\ell\ du^k$, d'où l'on tire : $dg_{ij} = \Gamma^\ell_{ik}\ du^k\ \overrightarrow{e}_\ell.\overrightarrow{e}_j\ +\ \Gamma^\ell_{jk} du^k \overrightarrow{e}_i.\overrightarrow{e}_\ell$
avec $\overrightarrow{e}_\ell.\overrightarrow{e}_j\ = g_{\ell j} \Longrightarrow dg_{ij} = (g_{i\ell}\ \Gamma^\ell_{jk}\ +\ g_{\ell j}\ \Gamma^\ell_{ik})\ du^k\ =\ \partial_k g_{i\ell}\ du^k$, d'où :

$$\boxed{\partial_k g_{ij} = g_{i\ell}\Gamma^\ell_{jk} + g_{\ell j}\Gamma^\ell_{ik}}$$