Partie I

Histoires de nombres et de calculs

Nombres et figuration

Les nombres et les calculs mésopotamiens et égyptiens nous ramènent jusqu'à 2000 avant J.-C. Des problèmes sont présents dans les deux civilisations, mais les textes sont difficiles à interpréter. Les textes babyloniens offrent l'occasion de montrer le rôle des traducteurs. Par exemple, selon qu'un mot est traduit par « additionner » ou « accumuler », les interprétations des solutions peuvent être arithmétique ou géométrique, la première ayant même conduit des lecteurs à parler « d'algèbre babylonienne ». Pour les confronter, on peut se rapporter à la partie III « Histoires d'inconnues et d'équations ». Certains textes égyptiens ont aussi été lus de manière algébrique, avec le risque de manquer ainsi une notion essentielle qui préside aux mathématiques égyptiennes puis grecques, celle de proportionnalité.

Les Grecs ont une approche figurative des nombres, liée au problème de l'irrationalité abordé dans la partie II. Cette approche permet de montrer des propriétés sur les nombres. En disant « nombre carré » et « nombre cube » plutôt que « à la puissance 2 et 3 », nous avons gardé quelque chose de la géométrie grecque qui est puissant ! Cette approche est présente dans la justification de Qusta ibn Luqa des méthodes de fausses positions. Ces méthodes permettront de résoudre des problèmes du premier degré en se passant de l'algèbre, bien après l'invention de celle-ci et dans l'enseignement jusqu'au siècle dernier. La notion de proportionnalité est au cœur de ces méthodes, elle se trouve donc reliée à l'idée de linéarité. L'approche figurative du crible d'Ératosthène par Saint-Loup joue aussi avec la linéarité.

L'arithmétique, science des nombres

Avec l'Antiquité grecque, nous passons d'une notion de nombre à un concept d'une théorie que les Grecs appellent « Arithmétique ». Les nombres y sont définis « en tant que tels » et liés les uns aux autres par des propriétés. L'arithmétique grecque repose sur la relation de divisibilité entre les nombres, avec les propriétés associées de nombre premier, de nombres premiers entre eux ou de nombres parfaits. En suivant de près le texte euclidien, il apparaît que l'approche figurative des nombres a constitué une limite pour concevoir une décomposition des nombres en produits de nombres premiers.

Les sections sur les nombres décimaux et binaires mettent en avant la base utilisée dans l'écriture des nombres. Le choix de la base est primordial dans la méthode générale de Blaise Pascal sur la divisibilité des nombres, comme celui-ci ne manque pas de le faire remarquer à ses lecteurs.

Après avoir lu Euclide et Pascal, la notion de congruence de Carl Friedrich Gauss et son écriture semblent plutôt facilitatrices que difficiles. Il faut avoir pratiqué assez de problèmes arithmétiques pour l'apprécier. Gauss l'introduit en montrant d'emblée les problèmes qu'elle permet de résoudre aisément, comme celui de la constructibilité à la règle et au compas des polygones réguliers. Ceci est hors programme mais intéressant à savoir. La méthode des congruences fournit un bon exemple de la puissance de l'écriture. Nous terminons cette partie avec l'utilisation du petit théorème de Fermat pour la cryptographie. Le texte des inventeurs de la méthode RSA illustre encore la méthode des congruences.

Algorithmes et procédures

Cette partie consacrée aux nombres et aux calculs comporte des algorithmes et des procédures, dont le premier algorithme de l'histoire, sans doute, qui permet d'obtenir « l'inverse babylonien » d'un nombre. Elle contient l'énoncé du fameux algorithme d'Euclide, pour affirmer qu'un nombre est premier ou que deux nombres sont premiers entre eux, et elle présente le « pulvérisateur » indien. Il existe bien d'autres algorithmes sur les nombres, en particulier, les algorithmes de primalité et de factorisation en nombres premiers, dont les mathématiques sous-jacentes sont souvent plus complexes. Le livre *Histoire d'algorithmes* pourra satisfaire ceux qui veulent en savoir plus (voir la liste en fin d'ouvrage).

L'exploration du triangle arithmétique, dit de Pascal, offre la possibilité d'énoncer plusieurs problèmes et, l'entreprendre en compagnie de Blaise Pascal, permet de savoir comment il en arrive à sa procédure de récurrence. Comme dans tous ses textes, il a le souci d'indiquer le cheminement de ses pensées.

Arrangement et combinatoire des nombres dans les récréations

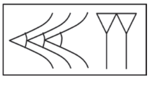
Les récréations mathématiques sur les nombres ne sont pas de simples divertissements, et encore moins des jeux. En revanche, elles sont souvent jubilatoires pour l'esprit. Les auteurs français du XIX^e^ siècle leur accordent un intérêt instructif en faisant appel à des visualisations. Nous les illustrons avec le problème de l'éventail, tiré des *Récréations mathématiques* d'Édouard Lucas, et un problème sur les dominos avec Gaston Tarry. Ce dernier problème donne lieu à l'élaboration de premières notions et de premiers théorèmes sur les graphes.

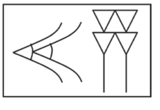
1. Calculs et problèmes en Mésopotamie

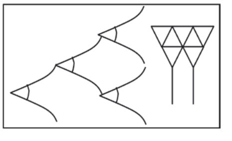
Nous trouvons des calculs sur des tablettes en argile venant de Mésopotamie, région située entre le Tigre et l'Euphrate. Les plus anciennes datent d'environ 2000 à 1750 avant J.-C. Ces tablettes se présentent comme des collections de problèmes suivis de leurs solutions, qui sont données sans explication. Nous allons examiner le système d'écriture des nombres, puis deux problèmes et leurs solutions, en essayant de comprendre comment celles-ci ont pu être obtenues. Nous essayons ainsi de percer l'une des premières énigmes de l'histoire des mathématiques, ou plutôt de l'invention mathématique. Ces problèmes sont d'une complexité assez grande, que nous pouvons exprimer de manière anachronique en disant qu'ils correspondent à des résolutions d'équations du second degré.

Le système de numération babylonien

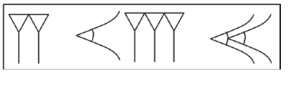
Les nombres sont écrits avec deux signes gravés dans l'argile, l'un en forme de « clou » correspond à « 1 » et l'autre en forme de « chevron » correspond à « 10 ». Jusqu'à « 59 », le système babylonien est additif et décimal. Par exemple,


correspond à « 32 »


correspond à « 24 »


correspond à « 45 ».

Puis, au-delà de « 59 », le système babylonien est positionnel, mais sans zéro, et sexagésimal. Par exemple,



que nous écrivons de manière moderne 2 ; 13 ; 20 (le point-virgule désigne un espace entre les trois nombres) pourrait correspondre à :

$$2 \times 60^2 + 13 \times 60 + 20.$$

Mais, puisqu'il n'y a pas de zéro pour indiquer la position exacte des trois nombres « 2 », « 13 » et « 20 », cela pourrait aussi correspondre à :

$$2 \times 60^5 + 13 \times 60^3 + 20 \times 60^2,$$

ou encore à :

$$2 \times 60^4 + 13 \times 60 + 20 \times (1/60)^2$$

Autrement dit, l'espace entre les trois nombres, que nous marquons par un point-virgule, signifie un décalage quelconque pour des puissances de 60. Par conséquent, l'écriture des nombres babyloniens est ambiguë, en particulier un clou peut désigner aussi bien « 1 », « 60 », une puissance positive ou une puissance négative de « 60 ».

Dans un système additif, l'addition ou la soustraction s'effectuent très simplement par ajout ou retrait de symboles. La multiplication peut être effectuée à l'aide d'additions successives. Il apparaît donc que la division est l'opération la plus difficile à effectuer. Les babyloniens divisent deux nombres en multipliant l'un de ces nombres par « l'inverse babylonien » de l'autre. Il existe des tablettes où sont disposés en colonnes un nombre et son « inverse babylonien » et une tablette donnant une procédure pour calculer des inverses (section 2).

Le problème 1 de la tablette BM 13901

La tablette BM 13901, qui date d'environ 1750 av. J.-C., contient vingt et un problèmes de difficultés graduées. Certains historiens estiment qu'elle serait donc la trace d'un enseignement, à l'image d'une liste d'exercices, comme nous en trouvons à la fin d'un chapitre de manuel. Sa traduction nécessite d'utiliser des termes actuels, elle induit donc une certaine manière d'interpréter les problèmes mésopotamiens et leurs solutions. L'enjeu est considérable puisque, selon le choix du traducteur, l'interprétation peut complètement changer. Pour nous en persuader, nous allons comparer deux traductions du problème 1 de la tablette. La première est proposée par François Thureau-Dangin en 1938, la seconde, dans les années 1990, par un historien des mathématiques danois, Jens Hoyrup.

François Thureau-Dangin est un archéologue français qui a été un pionnier dans l'étude de deux dialectes de la Mésopotamie, le babylonien et l'assyrien. Il traduit et donne une intelligibilité au texte en utilisant des termes arithmétiques[1].

> J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45.
> Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : 30.
> Tu multiplieras (entre eux) 30 et 30 : 15.
> Tu ajouteras 15 à 45 : 1. C'est le carré de 1.
> Tu soustrairas 30, que tu as croisé, de 1 :
> 30, le côté du carré.

La première et la dernière ligne de ce texte indiquent bien qu'il s'agit d'un problème, où il faut trouver le côté d'un carré connaissant une relation reliant ce côté et la surface du carré. Entre ces deux lignes, le texte fournit une suite d'opérations à effectuer pour obtenir la solution. Le lecteur pourra suivre les calculs en sachant que 45 doit être lu « 45/60 » c'est-à-dire « 3/4 ». De même, la division de « 1 » en deux parties égales est bien « 30/60 », c'est-à-dire « 1/2 ». Le lecteur peut également vérifier que la solution donnée au problème est correcte car $(1/2 \times 1/2) + 1/2 = 3/4$.

[1] Thureau-Dangin, François, *Textes mathématiques babyloniens*. Leiden : Brill, 1938, p. 1.

Cette traduction a conduit plusieurs commentateurs à interpréter ce problème comme un texte algébrique où l'inconnue est le côté d'un carré. En la notant x, le problème consiste à résoudre l'équation $x^2 + x = 45$ (= 3/ 4).

La solution proposée demande de calculer :

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

Ceci correspond pour l'équation $ax^2 + bx = c$ à la formule algébrique :

$$x = \frac{-b' + \sqrt{b'^2 + ac}}{a} \text{ avec } b' = \frac{b}{2}$$

Cette interprétation, appliquée à la liste des problèmes de la tablette, a conduit certains historiens à parler d'une « algèbre babylonienne ». Ceci est un effet conjugué de la traduction et de la symbolisation utilisée, qui laisse penser qu'il existerait une notion d'inconnue et une notion d'équation dans les mathématiques babyloniennes. Ces deux notions, qui nécessitent une certaine abstraction des types de problèmes examinés, ne se trouveront explicitées que plus tard dans les mathématiques arabes (partie III, section 2).

Par ailleurs, cette interprétation peut mettre dans l'ombre, parce qu'elle semble en rendre compte immédiatement, une véritable énigme : comment les babyloniens ont-ils pu trouver la procédure du problème 1 ? D'autant que celle-ci reste identique dans plusieurs problèmes de la tablette. La seconde traduction que nous allons examiner permet d'apporter une solution possible à cette énigme. Pour cela, elle rend aux mots « côté » et « carré » leurs sens géométriques.

Jens Hoyrup est un historien des mathématiques, professeur à l'université de Roskilde au Danemark. Il a présenté sa nouvelle interprétation des mathématiques babyloniennes dans de nombreuses publications, y compris en langue française. Il a ainsi donné une traduction en langue française du problème 1. Il a obtenu sa nouvelle interprétation de la tablette BM 13901 en recherchant d'autres tablettes, pas nécessairement mathématiques, où des termes de la tablette sont utilisés.

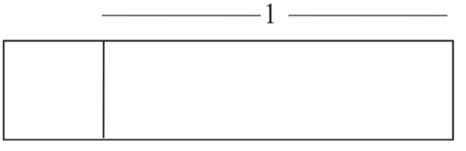
De la sorte, alors que la traduction de Thureau-Dangin utilise des termes arithmétiques, comme « additionner », « multiplier », « diviser », celle de Hoyrup se rapporte à des gestes de construction, comme « accumuler », « faire tenir », « briser ». Par exemple, le terme « forjet », qui se trouve dans la seconde ligne du problème 1, est un terme d'architecture, qui désigne en langue française une construction en saillie. Le verbe « ajouter » en quatrième ligne est à prendre dans le sens du verbe ancien « jouter », qui signifie réunir ou juxtaposer. Cette traduction conduit Hoyrup à une interprétation géométrique du texte babylonien. Elle ne s'accompagne pas d'équations mais de figures géométriques[2].

[2] Hoyrup, Jens, *« Algèbre d'al-Gabr » et « algèbre d'arpentage » au neuvième siècle islamique et la question de l'influence babylonienne*. Roskilde Universitetscenter, 2, 1990, p. 22.

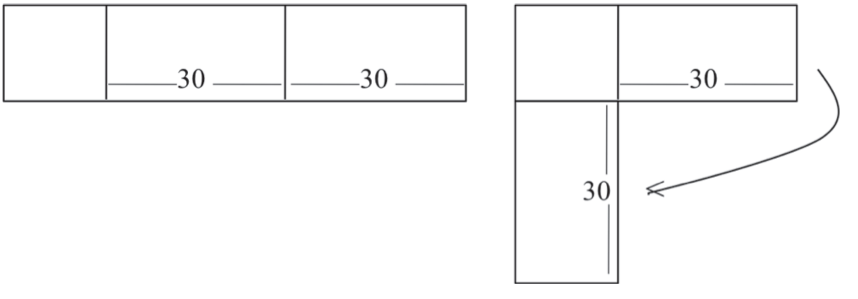
> La surface et ma confrontation j'ai accumulées : 45.
> 1 le forjet tu poses.
> La mi-part de 1 tu brises, 30 et 30 tu fais tenir l'un l'autre.
> 15 à 45 tu ajoutes : 1 fait que 1 soit équilatéral.
> 30 que tu as fait tenir, dans le corps de 1 tu arraches : 30 est la rencontre.

Nous reprenons une à une les lignes du problème pour indiquer la figure et les opérations géométriques correspondantes.

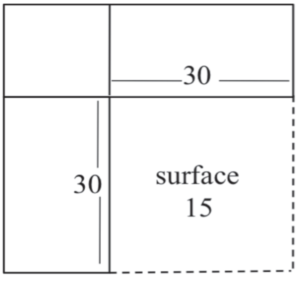
1) « La surface et ma confrontation j'ai accumulées : 45. 1 le forjet tu poses ». Dans cette traduction, la donnée de départ 45 est l'aire d'un rectangle, composé de ce carré et d'un rectangle ayant pour côtés le coté du carré et 1.



2) « La mi-part de 1 tu brises, 30 et 30 tu fais tenir l'un l'autre ». Briser l'unité permet de découper le rectangle en deux rectangles égaux de côté 30 (car 1 = 60). L'un des rectangles est déplacé pour être tenu à l'autre côté du carré.



3) « 15 à 45 tu ajoutes : 1 fait que 1 soit équilatéral ». L'aire ajoutée est celle d'un carré d'aire 15. La surface du grand carré obtenu est 45 + 15 = 60 (= 1), son côté est 1. D'où la valeur du côté du carré cherché.



La traduction donne à voir les différentes étapes de la procédure et elle permet ainsi d'envisager une solution à l'énigme : les babyloniens ont pu trouver leur solution à partir de figures géométriques. Autrement dit le « carré » du problème 1 est une figure géométrique et non la puissance deux d'une inconnue.

Le problème 23 de la tablette BM 13901

Le problème 23 est très intéressant car sa traduction en termes arithmétiques ne fournit pas d'explication algébrique simple, alors que l'interprétation en termes géométriques offre une compréhension immédiate de la résolution. Thureau-Dangin utilise des termes arithmétiques, comme « additionner », ou « soustraire »[3] :

> Une surface : j'ai additionné les quatre fronts et la surface : 41 ; 40.
> Tu inscriras les quatre fronts. L'inverse de 4 est 15.
> Tu porteras 15 à 41 ; 40 : tu inscriras 10 25.
> Tu ajouteras 1, l'unité 1 ; 10 ; 25. C'est le carré de 1 ; 5.
> Tu soustrairas 1, l'unité que tu as ajoutée : 5.
> Tu doubleras 5 : la surface est carrée de 10.

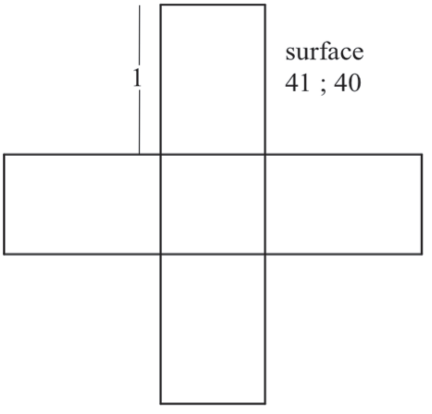
Le problème consiste à trouver le côté d'un carré tel que la surface de ce carré plus ses quatre côtés égalent 41 ; 40. Nous laissons le soin au lecteur d'écrire une interprétation algébrique de l'énoncé et de la solution du problème. Il pourra vérifier que le texte donne une des solutions de l'équation du second degré qui traduit le problème. Comparons avec la traduction de Hoyrup[4] :

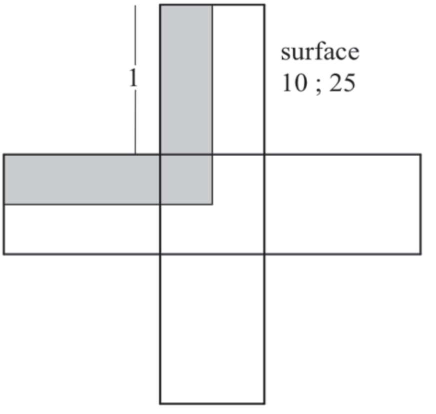
> Si quelqu'un te demande ainsi sur une surface,
> J'ai accumulé les quatre fronts et la surface : 41 ; 40.
> 4, les quatre fronts tu inscris. L'inverse de 4 est 15.
> 15 à 41 ; 40 tu élèves : 10 ; 25 tu inscris.
> 1, le forjet, tu ajoutes : 1 ; 10 ; 25 fait que 1 ; 5 soit équilatéral.
> 1, le forjet que tu as ajouté, tu arraches :
> 5 à deux tu répètes : 10 se confronte.

L'interprétation géométrique consiste à accumuler le carré et quatre rectangles égaux ayant pour côtés le côté du carré et l'unité, puis à diviser en quatre cette surface, qui vaut 41 ; 40. Suivant notre remarque plus haut sur la division, il faut multiplier 41 ; 40 par l'inverse 15 de 4 (car 4 fois 15 égal 60). On obtient l'aire d'un gnomon (figure en forme d'équerre) égale à 10 ; 25.

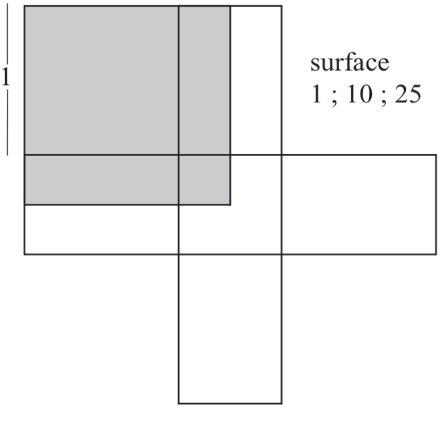
---

3 Thureau-Dangin, François, *op.cit.*, p. 9.
4 Hoyrup, Jens, *op. cit.*, p. 26.





Le forjet de longueur 1 permet de compléter le gnomon en un carré dont l'aire est 1 ; 10 ; 25 et le côté 1 ; 5. Nous en déduisons que le petit côté du gnomon est 5 et que le côté du carré cherché est 10 (égal à 2 fois 5).



Cette interprétation est proche de textes postérieurs à l'époque babylonienne, à savoir dans des textes de l'algèbre arabe, où ce même problème est posé. En effet, les algébristes arabes raisonnent sur des figures géométriques pour expliquer les algorithmes de résolution algébrique des problèmes. Ceci laisse penser qu'il a pu exister une filiation entre ces textes. Par ailleurs, la simplicité de cet exemple plaide en faveur d'une interprétation géométrique des problèmes babyloniens. Cette hypothèse signifie que les babyloniens ont associé des longueurs de droites aux nombres et des constructions géométriques aux opérations arithmétiques. L'addition de deux nombres est associée à l'ajustement de deux droites finies, la multiplication de deux nombres est associée à la figure du rectangle ou du carré.