# 1 Nombre et calcul algébrique

Ce chapitre est très important !

La maîtrise des calculs et de la manipulation des nombres permet de comprendre les notions qui vont apparaître tout au long du lycée.

## 1. Ensembles de nombres

### Définitions

L'ensemble des **entiers naturels** est $\mathbb{N} = \{0\ ;1\ ;2\ ;\ldots;389\ ;\ldots\}$.

L'ensemble des **entiers relatifs** est $\mathbb{Z} = \{\ldots;-201;\ \ldots;-1\ ;0\ ;1\ ;\ldots;389;\ldots\}$.

L'ensemble des **nombres décimaux** $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres s'écrivant sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a$ entier relatif et $n$ entier naturel.

L'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres fractionnaires $\dfrac{a}{b}$ où $a$ est un entier relatif et $b$ un entier naturel non nul.

L'ensemble des **nombres réels** $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez et que l'on reverra dans ce livre.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

## 2. Arithmétique

### Définitions

Soit $a$ et $b$ deux entiers relatifs avec $a \neq 0$. On dit que ***a* est un diviseur de *b*** ou que ***b* est un multiple de *a*** s'il existe un entier relatif $k$ tel que $b = a \times k$.

On dit que $b$ est un **nombre pair** si 2 est un diviseur de $b$, donc s'il existe un entier relatif $k$ tel que $b = 2 \times k$.

Résumés de cours

Résumés de cours

On dit que $b$ est un **nombre impair** s'il existe un entier relatif $k$ tel que $b = 2 \times k + 1$.

Soit $a$ un entier naturel. On dit que $a$ est un **nombre premier** s'il possède exactement deux diviseurs parmi les entiers naturels.

### Propriétés

Soit $a$, $b$ et $c$ trois entiers relatifs avec $a \neq 0$.

Si $a$ est un diviseur de $b$ et de $c$ alors $a$ est un diviseur de $b + c$.

Si $b$ est impair alors $b^2$ est impair.

Si $b^2$ est pair alors $b$ est pair.

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal et $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

**Critères de divisibilité :**

Un nombre entier est multiple de :

- 2 (donc pair) s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- 3 si la somme des chiffres qui le composent est multiple de 3 ;
- 5 s'il se termine par 0 ou 5 ;
- 9 si la somme des chiffres qui le composent est multiple de 9 ;
- 10 s'il se termine par 0.

## 3. Formes d'expression et calcul littéral

Voici les différentes formes d'expression que vous pouvez rencontrer tout au long de vos calculs :

| Nom | Forme | Exemple |
|---|---|---|
| Somme | $A + B$ | $2x^2 + 7x$ |
| Produit | $A \times B$ | $(7x+8)(6x-5)$ |
| Carré | $A^2$ | $(2x^5 - 4x + 2)^2$ |
| Quotient | $\frac{A}{B}$ | $\frac{5x-1}{2x-6}$ |
| Différence de 2 carrés | $A^2 - B^2$ | $(x^2-7)^2 - \left(\frac{1}{2x} - 6x\right)^2$ |

### Formules

Pour tous nombres réels $k$, $a$ et $b$ : $k\times(a+b)=k\times a+k\times b$.

Pour tous nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$ : $(a+b).(c+d)=ac+ad+bc+bd$.

Pour tous nombres réels $a$ et $b$ : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ;
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ et $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Pour tous nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$ avec $b$ et $d$ non nuls : $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$.

Pour tous nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$ avec $b$, $c$ et $d$ non nuls : $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$.

Pour tous nombres réels $a$, $b$ et $c$ avec $c$ non nul : $a\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{c}\times b=\dfrac{ab}{c}$.

Pour tous nombres réels $a$ et $b$ positifs : $\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$ et si $b\neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Pour tout nombre réel $a$ : $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a \text{ si } a\geq 0 \\ -a \text{ si } a\leq 0\end{cases}$.

Pour tous nombres réels $a$ et $b$ et tous entiers naturels $m$ et $n$ : $a^{m+n}=a^m\times a^n$ ;
$(a.b)^m=a^m\times b^m$ ; $(a^m)^n=a^{mn}$ et si $b\neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$ ; $b^{-m}=\dfrac{1}{b^m}$ et
$\dfrac{b^m}{b^n}=b^{m-n}$.

Résumés de cours

## Énoncés des exercices

### * Exercice 1 — 10 min

Compléter par le signe $\in$ ou $\notin$ :

$7{,}2 \ldots \mathbb{N}$ $\quad 7{,}2 \ldots \mathbb{Z}$ $\quad 7{,}2 \ldots \mathbb{D}$ $\quad 7{,}2 \ldots \mathbb{Q}$ $\quad -2 \ldots \mathbb{N}$ $\quad \frac{3}{4} \ldots \mathbb{D}$ $\quad \frac{3}{4} \ldots \mathbb{Z}$

$\frac{3}{4} \ldots \mathbb{Q}$ $\quad \frac{3}{4} \ldots \mathbb{R}$ $\quad \frac{-4}{3} \ldots \mathbb{D}$ $\quad \frac{-4}{3} \ldots \mathbb{Z}$ $\quad \frac{-4}{3} \ldots \mathbb{Q}$ $\quad \frac{1}{5} \ldots \mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{5} \ldots \mathbb{D}$

$\frac{1}{5} \ldots \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{4} \ldots \mathbb{N}$ $\quad \sqrt{4} \ldots \mathbb{Z}$ $\quad \sqrt{3} \ldots \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{3} \ldots \mathbb{R}$ $\quad \pi \ldots \mathbb{Z}$ $\quad \pi \ldots \mathbb{Q}$

$\pi \ldots \mathbb{R}$ $\quad 10^{-2} \ldots \mathbb{Z}$ $\quad 10^{-2} \ldots \mathbb{Q}$ $\quad 10^{3} \ldots \mathbb{Z}$ $\quad -3 \ldots \mathbb{N}$ $\quad -3 \ldots \mathbb{Z}$ $\quad -3 \ldots \mathbb{Q}$

### * Exercice 2 — 20 min

Simplifier les expressions suivantes :

**1.** a) $A=5-12$ 

b) $B=5-(-12)$

c) $C=-5-(-12)$

d) $D=-5-12$

**2.** a) $A=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$

b) $B=\frac{2}{5}-\left(-\frac{4}{3}\right)$

c) $C=-\frac{1}{6}-\left(-\frac{4}{9}\right)$

**3.** a) $A=3\times\left(-\frac{5}{6}\right)$

b) $B=\frac{4}{15}\times\left(-\frac{21}{6}\right)$

c) $C=3\times\frac{2}{7}\times\left(-\frac{9}{5}\right)\times2\times\frac{7}{3}$

**4.** a) $A=\sqrt{8}$

b) $B=\sqrt{12}$

c) $C=\sqrt{50}$

d) $D=\sqrt{8}+2\sqrt{32}-\sqrt{72}$

### * Exercice 3 — 20 min

**1.** Donner la liste des diviseurs positifs de 30.

**2.** Donner la liste des nombres premiers de 2 à 30.

**3.** Parmi les nombres entiers 10, 180, 215, 354, 1 449 et 52 358, lesquels sont multiples de :

a) 2 ? 

b) 3 ?

c) 5 ?

d) 9 ?

e) 10 ?

Exercices

## * Exercice 4 — 10 min

Donner la forme irréductible des fractions suivantes :

**1.** $\dfrac{27}{12}$

**2.** $\dfrac{45}{30}$

**3.** $\dfrac{23}{239}$

**4.** $\dfrac{80}{60}$

**5.** $\dfrac{46}{58}$

## * Exercice 5 — 15 min

On considère la fonction suivante en langage Python :

```
def f(a,b):
    k=0
    while a*k<=b:
        k=k+1
    return a*(k-1)
```

Que renvoie la commande **f(2,15)** ?

Pour répondre, remplir un tableau avec les différentes valeurs que prennent les variables de la fonction au fur et à mesure du programme.

## ** Exercice 6 — 25 min

Simplifier les expressions suivantes :

**1. a)** $A = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{5}$

**b)** $B = \dfrac{1}{\dfrac{2}{5}}$

**c)** $C = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{5}}$

**2. a)** $A = \dfrac{1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5}}{\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{4}}$

**b)** $B = \dfrac{-\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{2}}{\dfrac{2}{5} + \dfrac{7}{4} + \dfrac{1}{\dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{4}}}$

**c)** $C = \dfrac{\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{5}}{\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{3}} \times \dfrac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{5}}{1 - \dfrac{2}{3}}$

**d)** $D = \dfrac{1 - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4}}}{1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{3}}}$

**3.** a) $A=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$

c) $C=\left(\left(-3\right)^{2}\right)^{-1}\times\frac{\left(-3\right)^{4}}{3^{6}}$

b) $B=\left(-1\right)^{3}\times\left(-\frac{7}{8}\right)^{2}\times\left(\frac{3}{7}\right)^{3}\times\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$

**4.** a) $A=\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{48}$

c) $C=\sqrt{\frac{2^{2}}{5^{3}}}\times\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{45}}$

b) $B=\sqrt{\frac{3}{5}}\times\sqrt{\frac{2}{15}}$

Exercices

## ** Exercice 7

25 min

**1.** Développer les expressions suivantes et réduire :

a) $A=\left(2x-y\right)\left(4x+3\right)$

b) $B=3\left(x+y\right)-x\left(x-y\right)+y\left(x-y\right)$

c) $C=x\left(x-3\right)-x^{2}$

d) $D=\left(-x-8\right)\left(-x-3\right)$

e) $E=\left(5-x\right)\left(x+5\right)$

f) $F=\left(x+y\right)^{2}-\left(x-y\right)^{2}$

g) $G=\left(1+x\right)\left(1+y\right)$

**2.** Factoriser les expressions suivantes et simplifier si possible :

a) $A=x^{2}-16$

b) $B=9+6x+x^{2}$

c) $C=\left(x+3\right)^{2}-16$

d) $D=5x^{2}+5x$

e) $E=2\left(x-y\right)+a\left(y-x\right)$

f) $F=\left(x-1\right)^{2}-2\left(x-1\right)$

## *** Exercice 8

20 min

**1.** Développer et réduire les expressions suivantes :

a) $A=(8-x)(-x-3)^2$

b) $B=5(4x-3)^2$

c) $C=\frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{5}\right)^2$

**2.** Factoriser les expressions suivantes :

a) $A=9+12x+4x^2$

b) $B=(x+2)^2-(3x-1)^2$

c) $C=4(x-1)^2-9$

d) $D=3x^2+6x+3$

e) $E=x^2-4+3(x+2)(x-1)$

f) $F=(x-3)^2-4(x^2+4x+4)$

Exercices

## Contrôle

1 h • 20 points

### Exercice 1

15 min • 7 points

On considère l'algorithme suivant où $n$ est un entier saisi par l'utilisateur :

$p \leftarrow 1$

**Pour** $i$ allant de 1 à $n$ **Faire**

$p \leftarrow 3 \times p$

**Fin Pour**

1. Construire un tableau décrivant les variables en jeu en considérant que l'utilisateur a saisi pour $n$ la valeur 5.
2. Déterminer le rôle de cet algorithme.
3. Le traduire par une fonction en langage Python.

### Exercice 2

15 min • 5 points

Calculer les nombres suivants sans l'usage de la calculatrice :

1. $A = \dfrac{\dfrac{1}{2} - 3 + \dfrac{7}{8}}{1 - \dfrac{1}{7} + \dfrac{9}{4}} + \dfrac{1}{2}$
2. $B^2$ avec $B = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
3. $\dfrac{1}{C} - C + 1$ avec $C = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

### Exercice 3

30 min • 8 points

- **Partie A :**

1. Déterminer deux entiers naturels $a$ et $b$ tels que $a < \sqrt{2} < b$ et $b - a = 1$.
2. Avec les notations de la question précédente, calculer le nombre $m = \dfrac{a+b}{2}$, le comparer avec le nombre $\sqrt{2}$ et enfin, déterminer un nouvel encadrement $c < \sqrt{2} < d$ où $c$ et $d$ sont déterminés en fonction de $a$, $b$ et $m$, et, $d - c = \dfrac{1}{2}$.

Contrôles