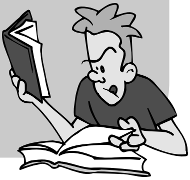
SECOND DEGRÉ

4 COMMENT METTRE UN TRINÔME SOUS FORME CANONIQUE ?



Méthode

On appelle forme canonique d'une parabole, l'expression :

$$f(x)=a\left(x-\alpha\right)^2+\beta$$

À partir de la forme $y=ax^2+bx+c$, on obtient la forme canonique en mettant tout d'abord en facteur a (coefficient de x^2) (même si cela fait apparaître des fractions).

On interprète ensuite la forme $x^2 \pm kx$ obtenue précédemment, comme le début d'une identité remarquable.

$x^2 \pm kx$ est le début du carré de $\left(x \pm \dfrac{k}{2}\right)^2$ le terme manquant est $\dfrac{k^2}{4}$.

On montre ainsi que : $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$.

Exemple : $\boxed{g(x)=4x^2-7x+3}$

$$g(x)=4x^2-7x+3=4\left(x^2-\frac{7}{4}x+\frac{3}{4}\right)=4\left(\left(x-\frac{7}{8}\right)^2-\frac{49}{64}+\frac{3}{4}\right)$$

$$g(x)=4\left(\left(x-\frac{7}{8}\right)^2-\frac{49}{64}+\frac{48}{64}\right)=4\left(\left(x-\frac{7}{8}\right)^2-\frac{1}{64}\right)$$

Soit $\boxed{g\left(x\right)=4\left(x-\dfrac{7}{8}\right)^2-\dfrac{1}{16}}$

Ainsi : $\alpha=\dfrac{7}{8}$ et $\beta=-\dfrac{1}{16}$

- **Il y a toujours un signe moins devant le terme $\dfrac{k^2}{4}$ (ce terme est manquant).**
- **Pour faire apparaître la forme canonique définitive, ne pas oublier de distribuer le terme *a* sur la grande parenthèse (attention aux signes, si *a* est négatif).**

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 4.1 (10 points) *15 min*

En utilisant le début du développement d'une identité remarquable, mettre sous forme canonique les trinômes suivants :

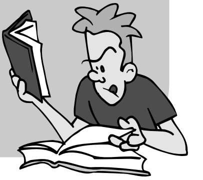
1. $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$
2. $g(x) = -3x^2 + 9x - 5$
3. $h(x) = 4x^2 + 6x - 7$
4. $k(x) = -5x^2 + 8x - 3$

Exercice 4.2 (10 points) *15 min*

En utilisant les formules $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, mettre sous forme canonique les expressions suivantes :

1. $f(x) = x^2 + 7x - 5$
2. $g(x) = -2x^2 + 6x + 1$
3. $h(x) = 5x^2 + x - 8$
4. $k(x) = -3x^2 + 6x - 10$

5 COMMENT RÉSOUDRE UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ?



Une équation du second degré est une équation de la forme : $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c réels et $a\neq 0$.

Méthode de résolution

1. Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac$
2. Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution.

   Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution unique $x=-\dfrac{b}{2a}$.

   Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple : $3x^2-14x+8=0$

On a : $a=3$ $\quad b=-14$ et $c=8$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta=(-14)^2-4\times3\times8=196-96=100=10^2$$

Ce discriminant est positif, l'équation admet donc deux solutions :

$$x_1=\frac{14+10}{6}=4 \text{ et } x_2=\frac{14-10}{6}=\frac{2}{3}$$

L'ensemble solution est donc $S=\left\{\dfrac{2}{3},4\right\}$.

- **Attention à bien comptabiliser le signe de *a, b* et *c.***
- **Quand *b* est négatif, le signe moins disparaît dans le calcul du discriminant.**

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 5.1 (6 points) *10 min*

Résoudre les équations suivantes :

1. $17x^2 - 21x - 26 = 0$

2. $9x^2 - 24x + 16 = 0$

3. $4x^2 - 5x + 12 = 0$

Exercice 5.2 (7 points) *10 min*

Après avoir déterminé les valeurs interdites et réduit au même dénominateur, résoudre les équations suivantes se ramenant à un second degré.

1. $x - \frac{1}{x} = -\frac{5}{6}$

2. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = 3$

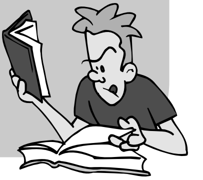
Exercice 5.3 (7 points) *15 min*

Équations bicarrées : après avoir posé $X = x^2$, résoudre les équations suivantes :

1. $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

2. $4x^4 - 11x^2 - 3 = 0$

6 COMMENT RÉSOUDRE UN SYSTÈME SOMME-PRODUIT ?



Méthode

Un système somme-produit est un système de la forme : $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$

Les solutions x et y de ce système sont également solutions de l'équation du second degré : $X^2-SX+P=0$.
Quand le discriminant est positif, le système a donc deux couples solutions.

Exemple : $\begin{cases} x+y=29 \\ xy=210 \end{cases}$

x et y sont solutions de l'équation du second degré : $X^2-29X+210=0$

Le discriminant est : $\Delta=29^2-4\times210=1$

Les racines sont donc : $X_1=\dfrac{29+1}{2}=15$ et $X_2=\dfrac{29-1}{2}=14$

L'ensemble solution du système est donc : $\boxed{S=\{(15;\ 14);\ (14;\ 15)\}}$

- **Encore une fois, faire bien attention aux signes, si *S* est négatif, le coefficient de *X* dans l'équation devient positif.**

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 6.1 (10 points) *20 min*

Résoudre les systèmes somme-produit suivants :

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=-26 \\ xy=165 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=\dfrac{31}{35} \\ xy=\dfrac{6}{35} \end{cases}$

Exercice 6.2 (10 points) *20 min*

En vous ramenant à un système somme-produit, déterminer tous les couples de réels $(x,\, y)$ solutions des systèmes :

1. $\begin{cases} x+y=3 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$

7 COMMENT FACTORISER UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ ?

Méthode

On appelle trinôme du second degré, toute expression de la forme :
ax^2+bx+c .

Les racines du trinôme sont les solutions de l'équation : $ax^2+bx+c=0$.

1^er^ cas : si $\Delta<0$ le trinôme n'est pas factorisable.

2^e^ cas : si $\Delta=0$ on a alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$.

3^e^ cas : si $\Delta>0$ on a alors :

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).$$

Exemple : Factorisation de $f\left(x\right)=3x^2-5x-2$

Le discriminant du trinôme est $\Delta=25-4\times3\times\left(-2\right)=25+24=49=7^2$

Les racines sont $x_1=\dfrac{5+7}{6}=2$ et $x_2=\dfrac{5-7}{6}=-\dfrac{1}{3}$

La factorisation est donc : $f\left(x\right)=3\left(x-2\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)$ soit $\boxed{f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(3x+1\right)}$

- **Attention à ne pas oublier le « *a* » devant les parenthèses dans les deux derniers cas.**
- **Comme dans l'exemple, on peut « rentrer » *a* dans une des parenthèses pour faire disparaître les fractions.**