Montrer qu'une somme est directe

Quand on ne sait pas !

Soit $p \geq 2$ et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

- **(Définition d'une somme directe)**

$$\left[\begin{array}{c} \text{La somme } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \\ \text{et l'on note } \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} F_k \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{c} \text{La décomposition de tout vecteur de } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \\ \text{sous la forme } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k, \text{ avec } u_k \in F_k, \text{ est unique} \end{array}\right]$$

On dit alors que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe.

- **(Caractérisation 1)**

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{c} \text{SI } 0_E = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k \text{ avec } u_k \in F_k, \\ \text{ALORS tous les } u_k \text{ sont nuls} \end{array}\right]$$

- **(Caractérisation 2)**

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{c} \mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_p) \text{ est une base de } \displaystyle\sum_{k=1}^{p} F_k \\ \text{où les } \mathscr{B}_k \text{ sont des bases de } F_k \end{array}\right]$$

- **(Caractérisation 3 - en dimension finie)**
  On suppose de plus que $F_1, \cdots, F_p$ sont de dimension finie.

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \dim\Big(\sum_{k=1}^{p} F_k\Big) = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

- **(Cas particulier important : $p = 2$)**

$$\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

Que faire ?

- Pour montrer que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe, on peut utiliser une des méthodes suivantes :
  - **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
    on suppose que $u_1 + \cdots + u_p = 0_E$ avec $u_k \in F_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, puis on exploite les propriétés des F_k pour montrer que tous les u_k sont nuls.
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
    on commence par déterminer une base $\mathscr{B}_k$ de F_k pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, puis on montre que la famille concaténée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_p)$ est une base de la somme $F_1 + \cdots + F_p$.
  - **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**
    on montre que la dimension de la somme des F_k est égale à la somme des dimensions des F_k.
  - **Méthode 4 (uniquement si $p = 2$)**
    on montre que l'intersection $F_1 \cap F_2$ est nulle.
    Dans le cas où $p \geq 3$, ce résultat ne se généralise pas aisément (cf exercice 1).

Conseils

- En pratique, on privilégie les méthodes 1 et 4 pour montrer qu'une somme est directe.
  La méthode 4 est illustrée dans la fiche 3 sur les sous-espaces supplémentaires.
  Les méthodes 1 à 3 sont comparativement illustrées dans la rubrique *Exemple traité*.

Exemple traité

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \text{Vect}(X^k Q)$.
Montrer que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe.

SOLUTION

- **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
  Soit $(R_1, \cdots, R_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $R_1 + \cdots + R_p = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad (\star)$.
  Montrons que $R_1 = \cdots = R_p = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
  Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, comme $R_k \in F_k$, il existe un scalaire λ_k tel que $R_k = \lambda_k (X^k Q)$.
  On en déduit alors les équivalences suivantes :

$$(\star) \iff \lambda_1 XQ + \lambda_2 X^2 Q + \cdots + \lambda_p X^p Q = 0_{\mathbb{K}[X]} \underset{Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}}{\iff} \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_p X^p = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

  Or la famille $(X^k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ est libre, donc tous les λ_k sont nuls, a fortiori les R_k aussi.

- **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
  Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la famille $\mathscr{B}_k = (X^k Q)$ est génératrice de F_k et est libre (car

constituée d'un seul vecteur non nul), donc est une base de F_k. Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Vect}(X^k Q) = \mathrm{Vect}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]})$$

La famille concaténée $\mathscr{B} = (X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est génératrice de $F_1 + \cdots + F_p$ et est libre (car constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés), donc est bien une base de $F_1 + \cdots + F_p$.

- **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**
  Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\dim F_k = \mathrm{rg}(X^k Q) = 1$ (car Q est non nul). Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Vect}(X^k Q) = \mathrm{Vect}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}),\ \text{d'où :}\ \dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) = \mathrm{rg}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]})$$

Or la famille $(X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc est libre, d'où :

$$\dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) = \mathrm{rg}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}) = \mathrm{Card}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}) = p = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

Exercices

EXERCICE 1.1

Soit $p \geq 3$ et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. On suppose que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$.
   Les sous-espaces F_1, F_2 et F_3 sont-ils nécessairement en somme directe ?
2. Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{la somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \forall k \in [\![1, p-1]\!],\ \Big(\sum_{i=1}^{k} F_i\Big) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1

1. Considérer trois droites judicieusement choisies de $E = \mathbb{R}^3$.
2. Utiliser la méthode 2 pour l'implication $\Leftarrow$.

EXERCICE 1.1

1 Considérons trois droites coplanaires et deux à deux distinctes de $E = \mathbb{R}^3$.

$$F_1 = \text{Vect}((1,0,0)) \quad \text{et} \quad F_2 = \text{Vect}((0,1,0)) \quad \text{et} \quad F_3 = \text{Vect}((1,1,0))$$

Ces trois espaces sont bien deux à deux en somme directe (car d'intersection deux à deux nulle). Par contre, ils ne sont pas en somme directe. En effet :

$$0_{\mathbb{R}^3} = \underbrace{(-1,0,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,-1,0)}_{\in F_2} + \underbrace{(1,1,0)}_{\in F_3}$$

Ainsi, des sous-espaces qui sont deux à deux d'intersection nulle ne sont pas nécessairement en somme directe.

2 Montrons la double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.
Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrons l'égalité ensembliste demandée.

$\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.

$\boxed{\subset}$ Soit $u \in \left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1}$ i.e. $\begin{cases} \exists (u_1, \cdots, u_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k,\ u = u_1 + \cdots + u_k \\ u \in F_{k+1} \end{cases}$

On en déduit l'égalité vectorielle suivante :

$$\underbrace{u_1}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{u_k}_{\in F_k} + \underbrace{(-u)}_{\in F_{k+1}} + \underbrace{0_E}_{\in F_{k+2}} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p} = 0_E$$

Or la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe, d'où $u_1 = \cdots = u_k = -u = 0_E$.
En particulier, $u = 0_E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.
Montrons que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.
Soit $(u_1, \cdots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $u_1 + \cdots + u_p = 0_E$.
On a alors l'équivalence suivante :

$$u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff \underbrace{u_1 + \cdots + u_{p-1}}_{\in F_1 + \cdots + F_{p-1}} = \underbrace{-\,u_p}_{\in F_p}$$

D'où $u_1 + \cdots + u_{p-1} = -u_p \in (F_1 + \cdots + F_{p-1}) \cap F_p = \{0_E\}$, et on en déduit alors que $u_1 + \cdots + u_{p-1} = u_p = 0_E$.
Sachant que $u_1 + \cdots + u_{p-1} = 0_E$ et $(F_1 + \cdots + F_{p-2}) \cap F_{p-1} = \{0_E\}$, on montre par un raisonnement analogue au précédent que $u_{p-1} = 0_E$.
De proche en proche, on montre que tous les u_k sont nuls.

Ainsi, on a bien montré l'équivalence souhaitée.

2 Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque

Quand on ne sait pas !

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- **(Définition de la supplémentarité)**

[F et G sont supplémentaires dans E]

$\Updownarrow$

[$E = F \oplus G$, c'est-à-dire tout vecteur $u \in E$ se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G]

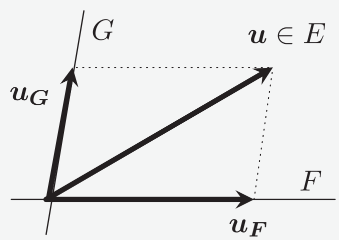

Figure illustrative

On dit aussi que F est $\boxed{\text{UN}}$ supplémentaire de G dans E ou que G est $\boxed{\text{UN}}$ supplémentaire de F dans E.

- **(Caractérisation de la supplémentarité)**

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G & \leftarrow \textit{garantit l'existence d'une décomposition} \\ F \cap G = \{0_E\} & \leftarrow \textit{garantit son unicité sous réserve d'existence} \end{cases}$$

- **(Supplémentarité des éléments caractéristiques d'un projecteur/d'une symétrie)**
Soit p et s des endomorphismes de E.
  - Si p est un projecteur de E, ALORS : $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
  - Si s est une symétrie de E, ALORS : $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Que faire ?

- Pour montrer que $E = F \oplus G$ en dimension quelconque, on peut suivre une des méthodes suivantes énoncées par ordre de praticité :
  - **Méthode 1 (en utilisant la définition)**
    on procède par analyse-synthèse dont on rappelle le principe et la rédaction :
    - *Analyse (on suppose l'existence d'une décomposition et on montre l'unicité).*
      Soit $u \in E$. On suppose que $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

      $$\left[\begin{array}{c} \textit{Raisonnement qui aboutit} \\ \textit{à un unique couple } (u_F, u_G) \end{array} \right]$$

      À l'issue de l'analyse, on trouve un unique couple (u_F, u_G) qui est CANDIDAT SOLUTION pour une telle décomposition.
    - *Synthèse (on montre l'existence d'une décomposition).*
      On vérifie que l'unique couple candidat solution trouvé est bien solution, c'est-à-dire $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_F + u_G = u$.
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation)**
    on intuite l'existence d'une décomposition de $u \in E$ comme somme d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G, puis on montre l'unicité de cette décomposition en montrant que $F \cap G = \{0_E\}$, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition de cette décomposition.
  - **Méthode 3 (en utilisant les propriétés des projecteurs et symétries)**
    on montre que F et G sont les éléments caractéristiques d'un certain projecteur p ou d'une certaine symétrie s à intuiter, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition du projecteur ou de la symétrie.

    EXEMPLE 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

    SOLUTION

    Posons $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
    On considère l'application $s : E \longrightarrow E$ définie par :

    $$\forall M \in E,\ s(M) = M^t$$

    On montre aisément que s est un endomorphisme de E et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Donc s est une symétrie de E, et on déduit alors que :

    $$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$

    Or on a les égalités ensemblistes suivantes :

    $$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{M \in E,\ (s - \mathrm{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E,\ M^t = M\} = F$$

    $$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{M \in E,\ (s + \mathrm{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E,\ M^t = -M\} = G$$

    Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

Conseils

- Ne pas hésiter à identifier les espaces E, F et G qui entrent en jeu et à préciser la nature des objets manipulés (uplets, polynômes, matrices, etc ...).
- Les méthodes présentées dans cette fiche sont valables en dimension quelconque, a fortiori en dimension finie.

Exemple traité

On note respectivement $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

SOLUTION

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrons que f se décompose de manière unique sous la forme :

$$f = g + h \qquad \text{avec } g \text{ paire et } h \text{ impaire}$$

- *Analyse.* Supposons qu'il existe un couple (g, h) solution, c'est-à-dire vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} g \text{ est paire} \\ h \text{ est impaire} \\ f = g + h \end{array}\right. , \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \left\{\begin{array}{lrcll} \forall x \in \mathbb{R}, & g(-x) & = & g(x) & (i) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & h(-x) & = & -h(x) & (ii) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) & = & g(x) + h(x) & (iii) \end{array}\right.$$

Cherchons des conditions nécessaires sur le couple (g, h).
Soit $x \in \mathbb{R}$. Cherchons des conditions nécessaires sur le couple $\big(g(x), h(x)\big)$.
On a en particulier le système suivant :

$$\underset{\textit{par } (iii)}{\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(-x) & = & g(-x) + h(-x) \end{array}\right.} \underset{\text{par } (i) \text{ et} (ii)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(-x) & = & g(x) - h(x) \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & g(x) + h(x) \\ f(x) + f(-x) & = & 2g(x) \end{array}\right.$$

Après calculs, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} h(x) & = & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \\ g(x) & = & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array}\right\}$ *ces expressions déterminent un unique couple (g, h)*

$\boxed{\text{SI}}$ il existe un couple (g, h) solution du problème, $\boxed{\text{ALORS}}$ nécessairement il est unique et est composé des fonctions g et h définies par :

$$g : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad h : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}\right.$$

■ *Synthèse.* Vérifions que le couple (g, h) obtenu à l'issue de l'analyse est bien solution du problème, c'est-à-dire vérifie : $\begin{cases} g \text{ est paire} & (i') \\ h \text{ est impaire} & (ii') \\ f = g + h & (iii') \end{cases}$

▶ La condition (i') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

▶ La condition (ii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$$

▶ La condition (iii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

Exercices

EXERCICE 2.1

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((-1, -2, 1)).$$

1 Montrer que $E = F \oplus G$.

2 En déduire l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.

EXERCICE 2.2

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\dfrac{\text{Tr}(A)}{n} I_n + \left(A - \dfrac{\text{Tr}(A)}{n} I_n\right)$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 En déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{Tr})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 2.1

1 Faire un raisonnement par analyse-synthèse.

2 On rappelle que p est défini par :

$$\forall u = u_F + u_G \in E,\ p(u) = u_F$$