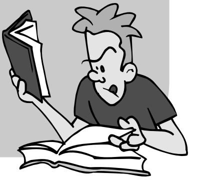
NOMBRES

1

À QUEL ENSEMBLE APPARTIENT CE RÉEL ?



Définitions et propriétés

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5.....\}$.

$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des **entiers naturels non nuls** : $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5,6....\}$.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** : $\mathbb{Z} = \{...-5,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$.

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux** ; exemples : $1{,}325$; $-1{,}82$; 12 ...

Pour tout nombre décimal a, il existe un entier n tel que $a \times 10^n \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** : ses éléments peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers relatifs :
$4/5, -2/3, 3/(-7)$...

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des **réels** : il contient tous les ensembles précédents et des nombres comme $\sqrt{2}, \pi, e$ ..., qui n'appartiennent pas à ces ensembles. On a l'inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Tout nombre rationnel a une représentation décimale **périodique** ou bien c'est un nombre décimal**.**

Exemples : $\frac{3}{7} = 0{,}\underline{428571}\ \underline{428571}\ \underline{428571}...$; $\frac{7}{2} = 3{,}5$. Tout nombre irrationnel a une représentation décimale infinie **non périodique**.

Exemple : $\pi = 3{,}141592654......$ ...on ne peut pas prévoir la suite.

Exemple Le développement décimal périodique de $31/19$ s'obtient en posant la division. On obtient : $31/19 = 1{,}\underline{631578947368421052}\,631...$

Le nombre $387{,}92/298{,}4$ est un nombre décimal car ce quotient vaut $1{,}3$.

Exemple Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

En effet, s'il était rationnel, on aurait $\sqrt{2} = p/q$, avec p et q entiers naturels et p/q irréductible. On aurait alors $q\sqrt{2} = p$, donc $2q^2 = p^2$. p^2 serait donc pair, donc p serait pair car le carré d'un nombre impair ne peut être pair.

On aurait donc $p = 2p'$, donc $2q^2 = 4p'^2$, soit $q^2 = 2p'^2$;

q^2 serait pair, donc q aussi.

C'est impossible car si p et q étaient pairs, p/q ne serait pas irréductible.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 1.1 (0,5 point) *2 min*

Déterminer la période du développement décimal de $\dfrac{13}{7}$.

Exercice 1.2 (1,5 point) *6 min*

Déterminer le plus petit des ensembles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ auquel appartiennent les nombres : $a = \dfrac{\frac{1}{3} - 8}{5 - \frac{9}{2}}$; $b = \dfrac{5\sqrt{20} - 2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$; $c = \dfrac{(3^2 \times 2^3)^{-2}}{3^{-5} \times 2^{-8}}$.

Exercice 1.3 (4 points) 10 min

Déterminer le plus petit des ensembles $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ auquel appartiennent : $a = \dfrac{2}{\sqrt{3} - 1} - \sqrt{3}$; $b = \left(\sqrt{\dfrac{3}{7}} + \sqrt{\dfrac{7}{3}} \right)^2$; $c = \sqrt{\dfrac{3380}{49005}}$; $d = \dfrac{3\pi - 6\sqrt{2}}{-5\pi + 10\sqrt{2}}$.

Exercice 1.4 (4 points) *12 min*

Montrer que le nombre $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5}$ est un nombre rationnel. Plus généralement, montrer que la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
La somme de deux irrationnels est-elle toujours un irrationnel ?

2 COMMENT CALCULER AVEC DES QUOTIENTS DE RÉELS ?

Rappels

Le quotient $\frac{a}{b}$ a un numérateur a et un dénominateur b ; il n'est défini que si $b \neq 0$.

$\frac{a}{b}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ d \neq 0 \\ ad=bc \end{cases}$	$\frac{a}{b}=c \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a=bc \end{cases}$

■ Si $b \neq 0$, $\frac{a}{b}$ est nul si et seulement si son numérateur a est nul.

■ Pour tous les résultats suivants, ne pas oublier, lorsqu'il s'agit de lettres, d'écrire que tout dénominateur doit être différent de 0.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{bc}{b}=\frac{a+bc}{b}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}$	$\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=1 \qquad c\times\frac{1}{c}=1$
$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$	$a:\frac{b}{c}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$

Pour additionner deux quotients, il faut les réduire au même dénominateur.
Pour multiplier deux quotients, il ne faut pas les réduire au même dénominateur.

$\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=1 \Leftrightarrow$ l'inverse de $\frac{c}{d}$ est $\frac{d}{c}$. $c\times\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow$ l'inverse de c est $\frac{1}{c}$.

Diviser $\frac{a}{b}$ par $\frac{c}{d}$, c'est multiplier $\frac{a}{b}$ par l'inverse de $\frac{c}{d}$, c'est-à-dire par $\frac{d}{c}$.

Diviser $\frac{a}{b}$ par c, c'est multiplier $\frac{a}{b}$ par l'inverse de c, c'est-à-dire par $\frac{1}{c}$.

Pour $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$, il faut poser les conditions : $b \neq 0$, $d \neq 0$ et $c \neq 0$.

La **seule règle de simplification** des quotients : $\frac{a\times b}{a\times d}=\frac{b}{d}$ $(a \neq 0,\ d \neq 0)$.

On ne peut simplifier un quotient que si numérateur et dénominateur sont des produits et s'ils ont un facteur commun.

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 2.1 (5 points) *15 min*

1. Calculer les sommes suivantes :

$\frac{2}{3}+\frac{10}{3}$; $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$; $2+\frac{3}{7}$; $\frac{5}{28}-3$; $\frac{3}{35}+\frac{7}{55}$.

2. Calculer les produits et quotients suivants et simplifier si possible :

$\frac{3}{11}\times\frac{7}{15}$; $\frac{4}{9}\times 3$; $\frac{2}{15}\times\frac{21}{11}\times\frac{121}{14}$; $\frac{7}{11}:\frac{14}{3}$; $\frac{14}{13}:7$;

$5:\frac{10}{9}$.

Exercice 2.2 (3 points) *10 min*

Réduire les sommes suivantes en précisant les conditions d'existence :

$$f(x)=\frac{3}{x}+\frac{x-1}{x}\ ;\ g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\ ;\ h(x)=2+\frac{1}{x-2}\ ;\ k(x)=\frac{2x-1}{x(x-1)}+\frac{3}{x}.$$

Exercice 2.3 (2 points) *5 min*

Réduire l'expression du nombre : $a=3+\dfrac{2+\frac{1}{3}}{1-\dfrac{5}{3+\frac{1}{4}}}$.

3 COMMENT CALCULER AVEC DES PUISSANCES DE RÉELS ?

Définition

Pour a réel et n entier strictement positif, $\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ facteurs}}$

En particulier : $\boxed{a^1 = a}$. Par convention : $\boxed{a^0 = 1}$ pour $a \neq 0$.

Par définition : $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ pour tout $a \neq 0$.

L'écriture scientifique d'un nombre est le produit d'un nombre décimal appartenant à l'intervalle $[1\,;10[$ et d'une puissance de 10.

m et n étant deux entiers relatifs, et a et b étant différents de 0 :

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(ab)^n = a^n \times b^n$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Exemple Réduire les produits, quotients, puissances suivants :

$5^3 \times 5^9$; $5^3 \times 5^{-9}$; $5^{-2} \times 5^{-7}$; $\dfrac{7^4}{7^2}$; $\dfrac{7^5}{7^9}$; $\dfrac{7^{-4}}{7^{-5}}$; $(9^3)^5$; $(9^{-4})^5$; $(9^{-2})^{-4}$.

$5^3 \times 5^9 = 5^{3+9} = \boxed{5^{12}}$; $5^3 \times 5^{-9} = 5^{3-9} = 5^{-6} = \boxed{\dfrac{1}{5^6}}$; $5^{-2} \times 5^{-7} = 5^{-2-7} = 5^{-9} = \boxed{\dfrac{1}{5^9}}$.

$\dfrac{7^4}{7^2} = 7^{4-2} = \boxed{7^2}$; $\dfrac{7^5}{7^9} = 7^{5-9} = 7^{-4} = \boxed{\dfrac{1}{7^4}}$; $\dfrac{7^{-4}}{7^{-5}} = 7^{-4-(-5)} = 7^1 = \boxed{7.}$

$(9^3)^5 = 9^{3\times5} = \boxed{9^{15}}$; $(9^{-4})^5 = 9^{(-4)\times5} = 9^{-20} = \boxed{\dfrac{1}{9^{20}}}$; $(9^{-2})^{-4} = 9^{(-2)\times(-4)} = \boxed{9^8.}$

Exemple Écrire sous la forme scientifique :

$\dfrac{5\times10\times50\times10^{-3}}{2\times(10^{-3})^3}$ et $\dfrac{0{,}4\times13\times75\times(10^2)^3}{25\times0{,}3\times10\times10^{-4}}$.

$$\frac{5\times10\times50\times10^{-3}}{2\times(10^{-3})^3} = \frac{25\times10^{-1}}{2\times10^{-9}} = 12{,}5\times10^8 = \boxed{1{,}25\times10^9.}$$

$$\frac{0{,}4\times13\times75\times(10^2)^3}{25\times0{,}3\times10\times10^{-4}} = \frac{0{,}4\times13\times3\times10^6}{0{,}3\times10^{-3}} = \frac{0{,}4\times13\times10^6}{10^{-1}\times10^{-3}} = \boxed{5{,}2\times10^{10}.}$$

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 3.1 (5,5 points) *15 min*

1. Écrire sans parenthèses : $(-2)^5$; $(-3)^4$; $(-5)^{-3}$; $(-7)^{-4}$.

2. Réduire : $3^4 \times 3$; $4^{-2} \times 2^8$; $(-5)^{-2} \times 5^{-7}$; $\dfrac{(-7)^{-5}}{7^2}$.

3. Réduire : $(2^3)^7$; $[(-5)^{-3}]^3$; $\left(\dfrac{6}{35}\right)^4 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^4$; $\dfrac{a \times a^{-5} \times (a^{-2})^{-2}}{(a^{-3})^3}$.

Exercice 3.2 (3 points) *10 min*

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

1. $a = 0{,}00000345$; $b = 1375{,}24 \times 10^{-2}$; $c = 76932{,}15 \times 10^4$.

2. $d = 3{,}4 \times 10^{-7} \times 2{,}7 \times (10^2)^{-5}$; $e = \dfrac{432 \times (10^{-1})^{-3}}{12 \times 10^8}$.

Exercice 3.3 (1,5 point) *5 min*

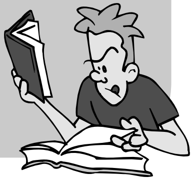
La planète Z est située à 4 années lumière de la terre. Un vaisseau spatial a mis 15 ans pour aller s'y poser.

Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h ?

Une année lumière représente $9{,}5 \times 10^{12}$ km.

4

COMMENT CALCULER AVEC DES RADICAUX ?



Définition et propriétés

On appelle racine carrée du réel **positif** a, le réel **positif** noté $\sqrt{a}$ dont le carré est a. Autrement dit : Pour tout $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est le seul réel positif tel que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$, c'est-à-dire : si $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = a$ et si $a \leq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$.

$\forall a \in \mathbb{R}_+$, $\forall b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$.

■ Attention : un réel strictement négatif n'a pas de racine :
$\sqrt{x}$ n'est défini que pour $x \geq 0$; $\sqrt{x-1}$ n'est défini que pour $x \geq 1$.

■ Pour obtenir un quotient à dénominateur entier, deux méthodes :

• Multiplier numérateur et dénominateur par « l'expression conjuguée » :

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c} \quad (b \geq 0, c \geq 0, b \neq c)$$

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{(b-\sqrt{c})(b+\sqrt{c})} = \frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c} \quad (c \geq 0, b^2 \neq c).$$

• Multiplier par $\sqrt{b}$: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \dfrac{a\sqrt{b}}{b}$ $(b > 0)$, car $\sqrt{b}\sqrt{b} = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b$.

Exemple

$$\frac{3}{5-\sqrt{2}} = \frac{3(5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})} = \frac{15+3\sqrt{2}}{25-2} = \boxed{\frac{15+3\sqrt{2}}{23}}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{5-3} = \boxed{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}}.$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \quad ; \quad \sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2}\sqrt{b} = \boxed{|a|\sqrt{b}.}$$

$$\frac{\sqrt{153}}{\sqrt{85}} = \sqrt{\frac{153}{85}} = \sqrt{\frac{17 \times 9}{17 \times 5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}.$$