Déterminer une matrice de passage et appliquer les formules de changement de base

Quand on ne sait pas !

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

> Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et x un vecteur de E.
> On écrit x dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme : $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, avec $x_1, \dots, x_n$ des scalaires.
>
> La matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne à n lignes dont les coefficients sont, de haut en bas, $x_1, \dots, x_n$.

On rappelle la définition suivante :

> Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
> La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont les matrices des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soit x un vecteur de E et f un endomorphisme de E. On note X la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$, X' la matrice de x dans la base $\mathcal{B}'$, M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, M' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On dispose des propriétés suivantes :

- P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$.
- $X = PX'$.
- $M' = P^{-1}MP$.

Que faire ?

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

- On calcule la matrice P de la façon suivante : la j-ème colonne de P est la matrice de e'_j dans la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire la matrice colonne constituée, dans l'ordre de haut en bas, des coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{B}$.

- Si l'on connaît la matrice X d'un vecteur $x \in E$ dans l'une des bases $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$, ainsi que la matrice P, on détermine la matrice X' de ce même vecteur dans l'autre base à l'aide d'un produit matriciel via la relation $X = PX'$ rappelée dans la partie précédente. Ceci peut nécessiter le calcul de P^{-1}.

- Si l'on connaît la matrice M d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ dans l'une des bases $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$, ainsi que la matrice P, on détermine la matrice M' de ce même endomorphisme dans l'autre base à l'aide de la relation $M' = P^{-1}MP$ rappelée dans la partie précédente. Ceci nécessite le calcul de P^{-1}.

Conseils

- Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie de référence, $\mathcal{B}$ est souvent la base canonique de l'espace vectoriel E dans lequel on travaille. Le calcul de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est alors assez rapide.
- En général, la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est choisie pour que la matrice d'un endomorphisme f soit « plus simple », souvent diagonale ou triangulaire. Il est possible qu'il soit plus facile de déterminer directement, donc sans utiliser la formule de changement de base, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exemple traité

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{E} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ et la famille $\mathcal{B} = \big((1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\big)$.
On admet que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (voir le tome de première année, fiche 108, pour une preuve).

1 Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{B}$.
Calculer la matrice inverse de P, notée P^{-1}.

2 Soit $x = (3,2,2) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les matrices colonnes X et X' des coordonnées de x dans les bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.

3 Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f\big((x,y,z)\big) = \big(-2x+3y+z, -x+2y+z, -3x+3y+2z\big)$$

Déterminer les matrices M et D de f dans les bases respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$.
Quel est lien entre les matrices M, D et P ?

SOLUTION

1 - Par définition, la matrice P est la matrice dont les colonnes sont les matrices des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ (dans l'ordre). Comme $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, cela revient à écrire les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ en colonne : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- On sait déjà que P est inversible, en tant que matrice de changement de base.

On calcule la matrice inverse de P, par exemple, en résolvant le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S)\ :\ P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ & & y & + & z & = & c \end{array} \right.$$

On effectue l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour obtenir un système équivalent que l'on résout par substitution :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ & - & y & & & = & -a+b \\ & & y & + & z & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & a-y-z \\ y & = & a-b \\ z & = & c-y \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & a-c \\ y & = & a-b \\ z & = & -a+b+c \end{array} \right.$$

Le dernier système se traduit matriciellement par : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2 On a directement : $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour calculer X', le plus simple est d'appliquer la formule du cours :

$$X = PX', \text{ donc } X' = P^{-1}X$$

Finalement :

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 L'énoncé affirme que f est linéaire. Le lecteur est invité à le vérifier.
On calcule :

$$f\big((1,0,0)\big) = \big(-2,-1,-3\big)\ ;\ f\big((0,1,0)\big) = \big(3,2,3\big)\ ;\ f\big((0,0,1)\big) = \big(1,1,2\big)$$

donc $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule aussi :

$$\begin{aligned} f\big((1,1,0)\big) &= \big(1,1,0\big) \\ f\big((1,0,1)\big) &= \big(-1,0,-1\big) = -\big(1,0,1\big) \\ f\big((1,1,1)\big) &= \big(2,2,2\big) = 2\big(1,1,1\big) \end{aligned}$$

donc $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Enfin, on dispose de la relation : $M=PDP^{-1}$.

Exercices

EXERCICE 1.1

On considère l'application linéaire :

$$p:\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(M+{}^tM\right)\end{array}$$

1 On note $\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Déterminer la matrice M de p dans la base $\mathcal{C}$.

2 Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$ et une base de $\mathrm{Im}(p)$.

3 En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de p est $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

4 Déterminer une matrice P inversible telle que $M=PDP^{-1}$.

EXERCICE 1.2

On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&-5\\-2&0&4\\1&1&0\end{pmatrix}$$

On pose : $u=e_1-e_2=(1,-1,0)$ et $v=f(e_1)+e_1$.

1 Calculer v.

2 Montrer que la famille $\mathcal{C}=(u,v,e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}.

4 Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{C}$.

➲ Source : EM Lyon

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1

2 Montrer que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont respectivement le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques et le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques, puis donner une base de chacun des ces sous-espaces.

3 Procéder par analyse-synthèse : en observant la matrice à obtenir, remarquer que le dernier vecteur de $\mathcal{B}$ appartient au noyau de p et que les trois premiers vecteurs de $\mathcal{B}$ sont leur propre image par p.

4 Utiliser la formule de changement de base.

EXERCICE 1.2

1 Calculer v matriciellement.

2 Utiliser un argument de dimension pour démontrer que c'est une base.

4 Calculer A' à l'aide de la formule de changement de base.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1

p est linéaire par linéarité de la transposition.

1 On calcule :

$$p\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad p\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$
$$p\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad p\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Ainsi $M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2 ■ Soit $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors en notant O la matrice nulle :

$$M\in\mathrm{Ker}(p)\Longleftrightarrow p(M)=O\Longleftrightarrow\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\right)=O\Longleftrightarrow M=\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}$$

Une base de $\mathrm{Ker}(p)$ est alors $\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ (génératrice d'après ce qui précède, libre car un seul vecteur non nul).

- Comme $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il vient :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(p) &= \operatorname{Vect}\big(p(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}), p(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}), p(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}), p(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})\big)\\ &= \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})\\ &= \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})\end{aligned}$$

Une base de $\operatorname{Im}(p)$ est alors $(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix})$ (génératrice d'après ce qui précède, libre par vérification rapide ; on peut aussi utiliser le théorème du rang pour obtenir $\dim\big(\operatorname{Im}(p)\big) = 3$ et éviter de vérifier la liberté).

3 Procédons par analyse-synthèse.

- Analyse.

Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est D. La dernière colonne de D est nulle, donc le dernier vecteur de la base $\mathcal{B}$ est un vecteur de $\operatorname{Ker}(p)$. Par ailleurs, les premiers vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont leur propre image, ce sont donc des vecteurs de $\operatorname{Im}(p)$.

- Synthèse.

On considère alors la famille de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ obtenue en concaténant les vecteurs des bases de $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Ker}(p)$ précédemment déterminées :

$$\mathcal{B} = (\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix})$$

La famille $\mathcal{B}$ est obtenue en concaténant une base de l'espace des matrices symétriques et une base de l'espace des matrices antisymétriques. Or ces espaces sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (résultat établi dans la fiche 112 du tome de première année).

Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (on pouvait aussi montrer rapidement que $\mathcal{B}$ est libre, et de cardinal $4 = \dim\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\big)$.)

Enfin, on calcule :

$$p(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \quad p(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$p(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \quad p(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Ainsi : $D = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

4 Si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$, alors on a bien : $M = PDP^{-1}$.

On calcule alors : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 1.2

1 La matrice de $f(e_1)$ dans la base $\mathcal{B}$ est par définition la première colonne de A. Ainsi $f(e_1) = (0, -2, 1)$.
Finalement $v = f(e_1) + e_1 = (1, -2, 1)$.

2 S'agissant d'une famille de 3 vecteurs d'un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si c'est une famille libre.
On a :

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma e_1 = (0,0,0) &\iff \alpha(1,-1,0) + \beta(1,-2,1) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0) \\ &\iff (\alpha + \beta + \gamma, -\alpha - 2\beta, \beta) = (0,0,0) \end{aligned}$$

On obtient successivement, de droite à gauche : $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$ et enfin $\gamma = 0$, donc $\mathcal{C}$ est libre.
Finalement $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3 Comme $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on construit P en écrivant les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ en colonne : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que P est inversible. On détermine P^{-1} en résolvant le système d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et de paramètres $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ -x & - & 2y & & & = & b \\ & & y & & & = & c \end{array} \right.$$

On résout par substitutions (et en réordonnant les inconnues à la fin) :

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & a - x - y \\ x & = & -2y - b \\ y & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & = & & - & b & - & 2c \\ y & = & & & & & c \\ z & = & a & + & b & + & c \end{array} \right.$$

Le dernier système se traduit matriciellement par : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4 D'après la formule de changement de base on a : $A' = P^{-1}AP$.

On calcule successivement $AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Solutions