Déterminer la loi d'une variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité

35

Quand on ne sait pas !

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant une densité f. Il faut savoir retrouver (voir partie suivante) la fonction de répartition et une densité de X^2 et de $\varphi(X)$ lorsque φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $X(\Omega)$, mais aucun résultat n'est supposé connu à ce sujet.

Que faire ?

- Dans le cas général, si X est une variable aléatoire à densité et si φ est une fonction définie sur $X(\Omega)$, pour étudier la loi de $\varphi(X)$, on commence par chercher sa fonction de répartition. Après avoir remarqué que $\varphi(X)$ prend ses valeurs dans $E = \varphi(X(\Omega))$, on exprime, pour tout x appartenant à E, l'événement $[\varphi(X) \leqslant x]$ en fonction d'événements de la forme $[X \leqslant a]$ ou $[X > a]$, ce qui revient à « résoudre l'inéquation » $[\varphi(X) \leqslant x]$, en considérant que X est l'inconnue.

  EXEMPLE 1 Si l'on cherche à déterminer la fonction de répartition de $aX + b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$), on est amené à distinguer les cas selon le signe de a :

  - si $a > 0$, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(aX + b \leqslant x) = P\left(X \leqslant \frac{x-b}{a}\right)$$

  - si $a < 0$, alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(aX + b \leqslant x) = P\left(X \geqslant \frac{x-b}{a}\right)$$

  soit encore, comme X est une variable aléatoire à densité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(aX + b \leqslant x) = 1 - P\left(X \leqslant \frac{x-b}{a}\right)$$

EXEMPLE 2 Si l'on cherche à déterminer la fonction de répartition de $|X|$, on remarque que $|X|$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ [|X| \leqslant x] = [-x \leqslant X \leqslant x]$$

EXEMPLE 3 Si l'on cherche à déterminer la fonction de répartition de X^2, on remarque que X^2 est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ [X^2 \leqslant x] = [-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]$$

- Si l'on souhaite montrer que $\varphi(X)$ est une variable aléatoire à densité (et éventuellement en trouver une densité), on commence par chercher sa fonction de répartition F (en fonction par exemple de celle de X), puis on justifie que celle-ci est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Conseils

- Quand on cherche à étudier la loi d'une variable aléatoire de la forme $\varphi(X)$ où X est une variable aléatoire à densité, il est préférable de commencer par déterminer précisément l'ensemble des valeurs prises par $\varphi(X)$ pour éviter des erreurs grossières de calcul ou de raisonnement.
- Quand on cherche à montrer que $Y = \varphi(X)$ est une variable aléatoire à densité (et éventuellement en trouver une densité), il n'est en général pas nécessaire d'expliciter totalement sa fonction de répartition F_Y : il est parfois plus simple de conclure à partir d'une expression de F_Y en fonction de la fonction de répartition F_X de X, car on sait déjà que F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un nombre fini de points. Avant de remplacer, il est donc préférable de voir si l'expression de F_Y est simple ou non.

Exemple traité

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \mathrm{e}^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.

SOLUTION

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives de X et Y. Comme X suit la loi exponentielle de paramètre λ, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc $Y = \mathrm{e}^X$ prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$. On a donc déjà :

$$\forall x \in \left]-\infty, 1\right[,\ F_Y(x) = 0$$

De plus, on a, comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x \in \left[1, +\infty\right[,\ [Y \leqslant x] = [\mathrm{e}^X \leqslant x] = [X \leqslant \ln(x)]$$

et donc :

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ F_Y(x) = F_X(\ln(x))$$

Par ailleurs, X suit la loi exponentielle de paramètre λ, donc on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_X(t) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

d'où, comme $\ln(x)$ appartient à $\mathbb{R}_+^*$ lorsque x est supérieur ou égal à 1 :

$$\forall x \in [1, +\infty[\,,\ F_Y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \ln(x)} = 1 - x^{-\lambda}$$

Finalement, on peut remarquer que F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ et que :

$$\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^+} F_Y(x) = 0 = F_Y(1)$$

donc F_Y est également continue en 1 à gauche et à droite. Ainsi F_Y est aussi continue en 1 ; par conséquent elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de 1, donc Y est une variable aléatoire à densité. De plus on sait que toute fonction positive coïncidant avec F_Y' sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ est une densité de Y, donc en particulier la fonction f_Y définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \lambda x^{-\lambda - 1} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Exercices

EXERCICE 35.1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On admet que $Y = X^2$ est une variable aléatoire. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

EXERCICE 35.2

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f, continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. On note F la fonction de répartition de X.

1. Justifier que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $F(X)$.

EXERCICE 35.3

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, et on considère la variable aléatoire $Y = \lfloor X \rfloor$.
Déterminer la loi de Y.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 35.1 Exprimer la fonction de répartition F de Y en fonction de la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ puis utiliser le fait que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 35.2 Commencer par justifier le fait que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 35.2 Remarquer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ puis, pour calculer la probabilité $P(Y = n)$, utiliser la définition de la partie entière.

Solutions des exercices

EXERCICE 35.1

On note F la fonction de répartition de Y et Φ celle de X. On peut déjà remarquer que Y est une variable aléatoire positive, donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ F(x) = 0$$

F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ [Y \leqslant x] = [-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]$$

et donc, comme X est une variable aléatoire à densité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(Y \leqslant x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$$

Par ailleurs, comme Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ P(Y \leqslant x) = 2\,\Phi(\sqrt{x}) - 1$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et comme Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0.
Enfin, on peut remarquer que :

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = 0$$

comme $F(0) = 2\,\Phi(0) - 1$ et $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$:

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = F(0)$$

donc F est également continue à gauche en 0. Finalement, F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de 0, donc Y est une variable aléatoire à densité et toute fonction positive coïncidant avec F' sur $\mathbb{R}^*$ est une densité de Y, en particulier la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\Phi'(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

avec :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

Finalement, Y admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

EXERCICE 35.2

1 Comme X est une variable aléatoire à densité, F est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = f(x)$$

Comme f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en découle que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, on a, puisque F est une fonction de répartition :

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

donc on peut conclure, d'après le théorème de la bijection, que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$

Solutions

2 $F(X)$ prend ses valeurs dans $]0,1[$, donc on a déjà :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-,\ P(F(X) \leqslant x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [1,+\infty[\,,\ P(F(X) \leqslant x) = 1$$

De plus, comme F est bijective et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$, elle admet une réciproque F^{-1}, elle-même strictement croissante et bijective de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\forall x \in]0,1[\,,\ [F(X) \leqslant x] = [X \leqslant F^{-1}(x)]$$

Ainsi, on a :

$$\forall x \in]0,1[\,,\ P(F(X) \leqslant x) = P(X \leqslant F^{-1}(x))$$

Comme F est la fonction de répartition de X, on en déduit :

$$\forall x \in]0,1[\,,\ P(F(X) \leqslant x) = F(F^{-1}(x)) = x$$

ce qui nous permet de conclure que $F(X)$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

EXERCICE 35.3

- Comme X suit une loi exponentielle, on a : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
- Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière, on a :

$$[Y = n] = [\lfloor X \rfloor = n] = [n \leqslant X < n+1]$$

Il en découle, comme X est une variable aléatoire à densité :

$$P(Y = n) = P(X \leqslant n+1) - P(X \leqslant n)$$

et comme X suit la loi exponentielle de paramètre 1 :

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \left[1 - \mathrm{e}^{-(n+1)}\right] - \left[1 - \mathrm{e}^{-n)}\right] \\ &= \mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-n-1} \\ &= \mathrm{e}^{-n}\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) \end{aligned}$$

Étudier l'existence et calculer la variance d'une variable aléatoire à densité

36

Quand on ne sait pas !

Soit X une variable aléatoire à densité et f une densité de X.

- X admet une variance si elle admet une espérance et si $[X-E(X)]^2$ admet une espérance et, dans ce cas, la variance de X est : $V(X) = E([X-E(X)]^2)$.
- Le plus souvent, pour étudier l'existence et calculer la variance de X, on utilise les propriétés suivantes :

> X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance et, dans ce cas (formule de Koenig-Huygens) :
>
> $$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
>
> X^2 admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et, dans ce cas :
>
> $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Se souvenir également que s'il existe des variables aléatoires indépendantes $X_1, \dots, X_n$ admettant une variance et telles que $X = X_1 + \cdots + X_n$, alors X admet une variance et :

$$V(X) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

Que faire ?

- Quand on dispose d'une densité f de X, si l'on souhaite prouver l'existence et calculer la valeur de $E(X^2)$, il est en général préférable de se ramener à la définition de l'intégrale impropre et de calculer les intégrales partielles. Par exemple, si $t \mapsto t^2 f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, on calcule séparément les intégrales $\displaystyle\int_x^0 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^y t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$, puis leurs limites, respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.

On pourra néanmoins remarquer que, si f est paire, alors les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et égales en cas de convergence ; par conséquent, si l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors X^2 admet une espérance et on a :

$$E(X^2) = 2\int_{0}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{y\to+\infty} 2\int_{0}^{y} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si l'on souhaite juste étudier l'existence de la variance de X (et non calculer sa valeur en cas d'existence), il suffit d'étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour cela, après avoir étudié la continuité de la fonction $t \mapsto t^2 f(t)$, on peut utiliser les critères de comparaison pour les intégrales de fonctions positives en tout point de discontinuité, ainsi qu'en $-\infty$ et $+\infty$.

Conseils

- Avant de se lancer dans des calculs potentiellement inutiles, il est important de bien lire la question : souhaite-t-on calculer la variance, ou bien seulement étudier son existence ? Dans le premier cas, on se rapporte le plus souvent à la définition de l'intégrale impropre, dans le second cas on utilise le plus souvent les critères de comparaison.
- Quand on souhaite calculer la variance d'une variable aléatoire, il est important de prouver son existence avant d'écrire : $V(X) = \ldots$ ou encore $E(X^2) = \ldots$

Exemple traité

Soit a et k deux réels strictement positifs. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\,a^k}{x^{k+1}} & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

On admet que f est une densité de probabilité et on considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur k pour que X admette une espérance.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur k pour que X admette une variance.
3. On suppose la condition précédente vérifiée. Calculer la variance de X.