1 Métrologie

Exercice 1

On détermine la viscosité (η) d'un liquide à l'aide d'un viscosimètre à chute de bille. La viscosité du liquide est donnée par la relation suivante :$\eta = K.(\rho_s - \rho).t$

où K est une constante dont on néglige l'incertitude, $\rho_s$la masse volumique de la bille, ρ ($\rho < \rho_s$) la masse volumique du liquide et t le temps de chute de la bille.

L'incertitude de mesure de la viscosité est donnée par :

$$\text{A.} \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta\rho_s}{\rho_s} + \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta t}{t}$$

$$\text{B.} \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta\rho_s}{\rho_s} - \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta t}{t}$$

$$\text{C.} \frac{\Delta\eta}{\eta} = \Delta\rho_s - \Delta\rho + \Delta t$$

$$\text{D.} \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta\rho_s + \Delta\rho}{\rho_s - \rho} + \frac{\Delta t}{t}$$

$$\text{E.} \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta\rho_s + \Delta\rho}{\rho_s + \rho} + \frac{\Delta t}{t}$$

La viscosité du liquide est donnée par la relation suivante :$\eta = K.(\rho_s - \rho).t$

Appliquons la fonction **ln** à cette expression

$$\ln\eta = \ln(K.(\rho_s - \rho).t)$$

$$\text{L}n\,\eta = \ln K + \ln(\rho_s - \rho) + lnt$$

Différentions cette expression

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{dK}{K} + \frac{d(\rho_s - \rho)}{(\rho_s - \rho)} + \frac{dt}{t}$$

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta(\rho_s)}{(\rho_s - \rho)} + \frac{\Delta(\rho)}{(\rho_s - \rho)} + \frac{\Delta t}{t}$$

Notons que dans une différence les erreurs absolues s'additionnent. Ainsi sachant que $\Delta K = 0$ on obtient

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta(\rho_s) + \Delta(\rho)}{(\rho_s - \rho)} + \frac{\Delta t}{t}$$

Rappel :

$$\frac{d(\ln(u))}{du} = \frac{du}{u}$$

Réponse D

Exercice 2

A partir des trois constantes c (vitesse de la lumière dans le vie), G (constante de gravitation universelle) et h (constante de Planck), on peut définir une masse fondamentale m telle que :

$$m = c^{\alpha}.G^{\beta}.h^{\gamma}$$

Déterminer par analyse dimensionnelle les valeurs numériques des exposants α, β, γ. On donne la dimension $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$

$$\text{A. } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$$
$$\text{B. } \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$$
$$\text{C. } \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$$
$$\text{D. } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$$
$$\text{E. } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}$$

Soit $m = c^{\alpha}. G^{\beta}. h^{\gamma}$

L'équation aux dimensions s'écrit :

$$[\boldsymbol{m}] = [\boldsymbol{c}]^{\boldsymbol{\alpha}}. [\boldsymbol{G}]^{\boldsymbol{\beta}}. [\boldsymbol{h}]^{\boldsymbol{\gamma}}$$

Avec

$$[c] = L. T^{-1}$$
$$[G] = M^{-1}L^{3}. T^{-2}$$

Déterminons la dimension de h constante de Planck en partant de l'équation aux dimensions de l'expression de l'énergie d'un photon.

$$[E] = [h][\nu] = [h]\frac{[c]}{[\lambda]} = ML^{2}T^{-2}$$

$$[h] = ML^{2}T^{-2}\frac{[\lambda]}{[c]} = ML^{2}T^{-2} \times \frac{L}{LT^{-1}} = ML^{2}T^{-1}$$

D'après l'équation 1 on a donc :

$$\mathrm{M} = (\mathrm{LT}^{-1})^{\alpha}(\mathrm{M}^{-1}L^{3}T^{-2})^{\beta}(MT^{-1}L^{2})^{\gamma}$$

$$\mathrm{M} = L^{\alpha+3\beta+\gamma}T^{-\alpha-2\beta-\gamma}M^{-\beta+\gamma}$$

Cette équation aux dimensions conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \gamma - \beta = 1 & (1) \\ \alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 & (2) \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) – (3)

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma - \beta = 1 \\ \gamma + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{2} \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On remplace dans (3) pour obtenir α

$$\alpha = +\frac{1}{2}$$

Réponse A

Exercice 3

La concentration C d'un médicament introduit dans le sang à $t = 0$ est modélisée par une loi d'élimination $f(t) = dC/dt$ proportionnelle à sa concentration $C(t)$.

$In(2) = 0{,}69$.

A. Sa loi de variation est de la forme $C(t) = C_0 e^{-kt}$

B. Sa loi de conservation est de la forme $C(t) = C_0(1 - e^{-kt})$

C. Dans le SI, k est exprimé en $kg.m^{-3}$.

D. C_0 correspond à la concentration dans la seringue au moment de l'injection

E. Le temps de demi-vie vaut 1,38 h si k vau 2 h^{-1}

On a

$\frac{dC}{dt} = -k \times C$le signe – indiquant une élimination du médicament

$$\frac{dC}{dt} = -k \times C \implies \frac{dC}{C} = k\ dt$$

$$\int \frac{dC}{C} = \int k\ dt \implies \ln C(t) = -kt + A$$

où A est une constante.

En appliquant la fonction exponentielle on obtient :

$$C(t) = e^{(-kt+A)} = e^{-kt} \times A'$$

Où A' est une constante que nous déterminons en utilisant les conditions initiales. On sait qu'à t = 0 $C(t = 0) = C_0$

On a donc :

$$C(t=0) = A' = C_0$$

Ainsi on obtient la loi d'élimination du médicament dans le sang

$C(t) = C_0 e^{-kt}$avec k en s^{-1}

Evaluons le temps de demi-vie $t_{\frac{1}{2}}$c'est-à-dire le temps auquel la concentration initiale aura été divisé par deux.

Soit $C\left(t = t_{\frac{1}{2}}\right) = C_0 e^{-kt_{1/2}} = \frac{C_0}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt_{1/2}}$$

$$\Longrightarrow -\ln 2 = -k\ t_{\frac{1}{2}}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \Longrightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{0.69}{2} = 0.34\ h$$

Réponse A

Exercice 4

La dimension

A. D'une accélération est M.T^{-2}

B. D'une énergie est ML$^{2\cdot}$ .T^{-2}

C. D'une quantité de mouvement est ML^{2}T^{-1}

D. D'une charge électrique est TI

E. D'un angle solide est L^2

Pour déterminer la dimension d'une grandeur physique il est utile de se ramener à des équations simples où cette grandeur intervient. Par exemple pour une accélération on peut se souvenir que cette grandeur est la différentielle de la vitesse par rapport au temps et ainsi déterminer la dimension d'une accélération.

On a dans ce cas présent la dimension d'une accélération comme la pesanteur g

$$[g] = LT^{-2}$$

Ainsi g a pour dimension $m.s^{-2}$

Pour l'énergie on peut se souvenir de l'expression de l'énergie potentielle d'un corps de masse m à une hauteur h

On obtient ainsi

$$[E] = [m][g][h] = M \times LT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$$

La dimension d'une énergie est donc $Kg \times m^2 \times s^{-2}$

Pour la charge électrique on part de l'équation reliant la charge, le courant et le temps.

$$Q = I \times t$$

$$[Q] = [I] \times [t] = IT$$

La dimension d'une charge est donc $A.s$

Pour déterminer la dimension d'un angle solide il faut revenir à la définition et on obtient très facilement $[\Omega] = L^{-2}$ soit m^{-2}

Réponse : B et D

Exercice 5

Dans une pièce à 20°C, la sensation de froid éprouvée par une personne marchant pieds nus sur un sol carrelé (coefficient de conductivité thermique $\lambda = 1 W.m^{-1}.K^{-1}$) par rapport à sa sensation sur un tapis ($\lambda = 0.04\ W.m^{-1}.K^{-1}$)), s'explique parce que :

A. La température du carrelage est inférieure à celle du tapis

B. Le transfert de chaleur par conduction est plus efficace sur le carrelage

C. La différence de température du carrelage entraîne une vasoconstriction réflexe des pieds nus qui suffit à elle seule à expliquer cette sensation de froid.

D. Le transfert d'énergie par convection est plus grand sur le carrelage.

E. Le coefficient de conductivité thermique est 25 fois moins élevé sur le carrelage que sur le tapis.

La température du carrelage n'est pas inférieure à celle du tapis.

Par contre le carrelage est meilleur conducteur que le tapis. En effet, on a :

$$\lambda_{carrelage} = 25 \times \lambda_{tapis}$$

Réponses B

Exercice 6

Un balancier d'horloge est constitué d'une tige de masse m, de longueur l au bout de laquelle se trouve un disque de rayon R et de masse M.

A. Le terme MR^2 a la dimension d'un moment d'inertie.

B. g a la dimension d'une force.

C. Si une relation n'est pas homogène cela veut dire qu'elle est fausse.

D. Si la relation est homogène cela veut dire qu'elle est juste.

E. La formule ci-dessous reliant la période T_0 aux autres paramètres est dimensionnellement correcte

$$T_0 = 2\pi \times \sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3} + \frac{MR^2}{2} + M(R+l)^2}{g(M(l+R) + \frac{ml}{2})}}$$

La dimension d'un moment d'inertie est ML^2 donc le terme MR^2a la même dimension qu'un moment d'inertie.

g a la dimension d'une accélération LT^{-2}

En effet si une relation n'est pas homogène alors cette relation est fausse mais la réciproque n'est pas vraie , si une relation est homogène elle n'est pas nécessairement juste.

En écrivant l'équation aux dimensions de la formule donnant la période on obtient :

$$[T_0] = [2\pi] \times \sqrt{\frac{\left[\frac{ml^2}{3}\right] + \left[\frac{MR^2}{2}\right] + [M(R+l)^2]}{[g]([M(l+R)] + \left[\frac{ml}{2}\right])}}$$

$$[T_0] = 1 \times \sqrt{\frac{\mathrm{ML^2 + ML^2 + ML^2}}{\mathrm{LT^{-2}(ML + ML\ \ )}}}$$

$$[T_0] = \frac{(\mathrm{ML^2})^{\frac{1}{2}}}{(ML^2T^{-2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{M^{1/2} \times L}{M^{1/2} \times L \times T^{-1}} = T$$

La formule a donc les bonnes dimensions.

Réponses A, C et E.