Partie A

RAPPELS ET COMPLEMENTS DE THERMODYNAMIQUE DES GAZ ET DES SYSTEMES

Chapitre I

LES OUTILS DE LA THERMODYNAMIQUE

1. RELATIONS FONDAMENTALES

1.1 Grandeurs thermodynamiques

a. Expression des quantités de chaleur et rapports des chaleurs spécifiques

On rappellera que, dans un système ouvert, l'échange thermique se déroule de façon isobare. Celui-ci se déroule de manière isochore dans un système fermé. la quantité de chaleur échangée entre deux états 1 et 2 s'écrit dans les deux cas par $Q_{12} = \int_1^2 TdS$. On l'explicite respectivement à l'aide des expressions:

$$\begin{aligned} \delta Q_{12,p} &= c_p dT + \lambda dp \\ \delta Q_{12,v} &= c_v dT + l dv \end{aligned} \qquad \text{(I.1)}$$

Les chaleurs spécifiques c_p, c_v, λ et l s'écrivent respectivement:

$$c_p = \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \; ; \; c_v = \left.\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \; ; \; \lambda = -T\left.\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \; ; \; l = T\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \qquad \text{(I.2)}$$

Le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants est noté $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

h, u désignent respectivement l'enthalpie et l'énergie interne (en valeurs spécifiques) du système.

Ce rapport $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, employé dans les applications thermodynamiques usuelles perd son sens dans le cas d'évolutions où le fluide change d'état ou de composition chimique. C'est ce qui se produit en particulier si l'on détend de la vapeur d'eau ou des gaz de combustion dans une tuyère. Dans ces conditions, il convient de remplacer cette valeur par une expression plus générale[1] : $\Gamma = \left.\frac{\partial h}{\partial u}\right)_s$. En l'absence de code de calcul thermochimique permettant d'effectuer le calcul du rapport des chaleurs spécifiques à chaque instant et prenant donc en compte d'éventuels changements d'état ou de composition, le calcul de Γ peut se faire de manière

[1] *Adiabatic gamma* selon la terminologie anglo-saxonne, dont le calcul sera demandé dans un des problèmes proposés.

graphique en ayant recours au diagramme de Mollier du fluide concerné. Reprenant l'expression de Γ qui vient d'être donnée et la développant, on lit :

$$\Gamma = \frac{1}{\left.\frac{\partial u}{\partial h}\right)_S} = \frac{1}{\left.1 - \frac{\partial(NRT)}{\partial h}\right)_S} \tag{I.3}$$

b. Expression des formes de travail

Le travail des forces exercées sur un système se décline, quant à lui, en:

- Travail $\tilde{W}_D$ des forces de pression $\int_{A_e} p_e dA$ et $\int_{A_s} p_s dA$ hydrostatiques normales aux sections A_e et A_s qui, dans le cas d'un écoulement dans un système ouvert, déterminent respectivement l'entrée d'une masse δm_e et la sortie d'une masse δm_S. Ce travail est désigné par le terme de travail de déplacement (ou de transvasement) et peut se mettre sous une forme faisant intervenir le travail des forces hydrostatiques à l'entrée, $\delta\tilde{W}_e$ et à la sortie $\delta\tilde{W}_s$ du système:

$$\delta\tilde{W}_D = \delta\tilde{W}_e + \delta\tilde{W}_s = \frac{p_e}{\rho_e}\delta m_e - \frac{p_s}{\rho_s}\delta m_s \tag{I. 4}$$

C'est-à-dire que le travail de déplacement élémentaire par unité de masse est :

$$\delta\tilde{W}_D = -d\left(\frac{p}{\rho}\right) = -d(pv) \tag{I. 5}$$

Soit :

$$\tilde{W}_D = -\int_e^s d(pv) \tag{I. 6}$$

- Le travail $\tilde{W}_t$ dit technique qui est de l'énergie mécanique transférée au système au moyen de pièces tournantes, $\tilde{W}_t = \int_e^s vdp$
- Le travail, $\tilde{W}_{CV}$ qu'un système fermé reçoit pendant Δt du fait de la variation de son volume, dont l'expression très classique est: $\tilde{W}_{CV} = -\int_e^s pdv$

1.2 Les équations de bilan dans les systèmes ouverts

a. Bilan de matière

On considère un volume de contrôle (Figure I.1) de masse M à l'intérieur duquel peuvent transiter des éléments de masse: entrants δm_e et sortants δm_s. Ce système reçoit un flux de masse Δm_e à l'instant t et éjecte un flux Δm_s à l'instant $t+\Delta t$, ce qui conduit à un accroissement ΔV de sa vitesse durant l'intervalle Δt.

À l'instant t, on considère que le système a une masse $M(t)+\delta m_e$ et, à l'instant $t + \Delta t$, une masse $M(t+\Delta t)+\delta m_s$. Comme il n'y a ni production ni dissipation de masse, la masse totale du système est fixe, soit :

$$M(t)+\delta m_e = M(t+\Delta t)+\delta m_s \tag{I.7}$$

$$M(t+\Delta t)-M(t) = \Delta M = \delta m_e - \delta m_s \tag{I.8}$$

On adoptera comme convention que $\Delta m_e>0$ (masse captée) et $\Delta m_s <0$ (masse éjectée).

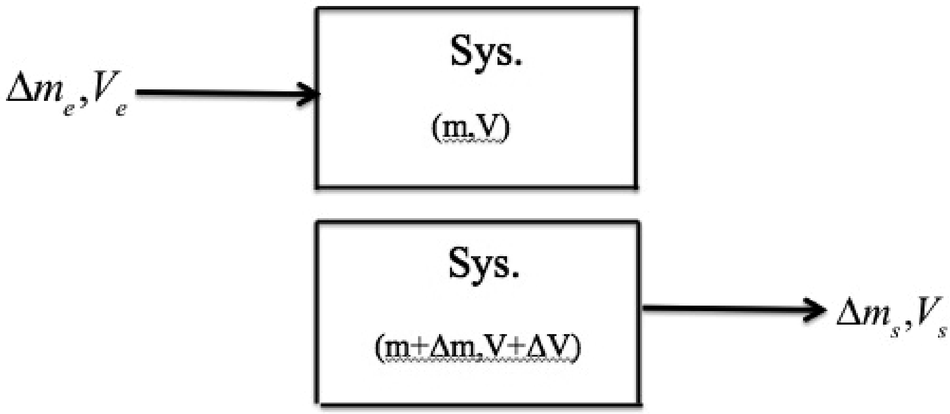

Figure I.1- Schématisation d'un système ouvert

Ce qui, aux limites, lorsque $\Delta t \to 0$, pourra s'écrire :

$$\frac{dM}{dt}+\dot{m}_s-\dot{m}_e=0 \tag{I.9}$$

$\dot{m}_e$ et $\dot{m}_s$ étant respectivement le débit entrant et le débit sortant et $\frac{dM}{dt}$ la variation de la masse au sein d'un volume de contrôle.

Si le système est dans un état stationnaire (régime permanent), la masse M ne varie pas, $\frac{dM}{dt}=0$ ce qui signifie que $\dot{m}_e = \dot{m}_s$. En convenant de considérer les vitesses moyennes axiales V_1 et V_2 et les masses volumiques ρ_1 et ρ_2 (uniformes) dans les sections 1 et 2, d'aires respectives A_1 et A_2, il vient :

$$\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 V_2 \tag{I.10}$$

b. Bilan d'énergie

Désignant respectivement par $E_t(t)$ l'énergie totale des masses M(t) à l'instant t on écrit:

$$E_t(t)+e_{te}\delta m_e \tag{I.11}$$

De même, l'énergie totale $E_t\,(t + \Delta t)$ de la masse $M(t+\Delta t)$ à l'instant $t + \Delta t$, sera :

$$E_t\left(t+\Delta t\right)+e_{ts}\delta m_s \qquad \text{(I.12)}$$

désignant par e_t l'énergie totale de l'unité de masse de matière. La variation cherchée est donc :

$$E_t\left(t+\Delta t\right)+e_{ts}\delta m_s-\left[E_t\left(t\right)+e_{te}\delta m_e\right] \qquad \text{(I. 13)}$$

Cette variation d'énergie, en l'absence de forces électromagnétiques dans le cas d'un système stationnaire[1], résulte de l'action des travaux effectués et des échanges thermiques. On aura ainsi:

$$\sum\tilde{W}=\tilde{W}_D+\tilde{W}_t+\tilde{W}_{CV} \qquad \text{(I. 14)}$$

où $\sum\tilde{W}$ désigne la somme des quantités de travail reçues.

A ces travaux, il convient d'ajouter l'énergie d'origine thermique $\sum\tilde{Q}$ susceptible d'agir. D'après le principe de conservation et de transformation de l'énergie, la variation de l'énergie totale pourra donc s'écrire:

$$E_t\left(t+\Delta t\right)-E_t\left(t\right)=e_{te}\delta m_e-e_{ts}\delta m_s+\sum\tilde{W}+\sum\tilde{Q} \qquad \text{(I.15)}$$

On peut alors écrire une expression générale du bilan d'énergie :

$$E_t\left(t+\Delta t\right)-E_t\left(t\right)=e_{te}\delta m_e-e_{ts}\delta m_s+\frac{p_e}{\rho_e}\delta m_e-\frac{p_s}{\rho_s}\delta m_s+\delta\tilde{W}_t+\delta\tilde{W}_{CV}+\sum_i\delta\tilde{Q}_i \qquad \text{(I.16)}$$

A ce stade, on introduit l'enthalpie totale :

$$h_t=e_t+\frac{p}{\rho}=u+e_c+e_p+\frac{p}{\rho}=h+e_c+e_p \qquad \text{(I.17)}$$

u, e_c et e_p désignent respectivement l'énergie interne u, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. En introduisant les débits et les puissances mécaniques et thermiques:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m_i}{\Delta t}=\dot{m}_i\ ;\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\tilde{W}_t}{\Delta t}=\dot{\tilde{W}}_t\ ;\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\tilde{W}_{CV}}{\Delta t}=\dot{\tilde{W}}_{CV}\ ;\ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sum_i\tilde{Q}_i}{\Delta t}=\sum_i\dot{\tilde{Q}}_i \qquad \text{(I.18)}$$

On obtient ainsi:

$$\frac{dE_t}{dt}=h_{te}\dot{m}_e-h_{ts}\dot{m}_s+\dot{\tilde{W}}_t+\dot{\tilde{W}}_{CV}+\sum_i\dot{\tilde{Q}}_i \qquad \text{(I. 19)}$$

Avec, en régime permanent :

$$\frac{dE_t}{dt}=0\ ;\ \dot{m}_e=\dot{m}_s=\dot{m} \qquad \text{(I.20)}$$

[1] On ne peut pas concevoir un système dont le volume varie lorsque le système est dans un état stationnaire.

En l'absence de champs de forces électromagnétiques, de frottement, de déformations (stationnaires) de la surface de contrôle ($W_{cv} = 0$), oN aura, dans le cas d'un système ouvert:

$$h_{ts} - h_{te} = \frac{\dot{\tilde{W}}_t}{\dot{m}} + \frac{\sum_i \dot{\tilde{Q}}_i}{\dot{m}} \tag{I.21}$$

En désignant par : $w_t = \frac{\dot{\tilde{W}}_t}{\dot{m}}$; $\sum q_i = \frac{\sum_i \dot{\tilde{Q}}_i}{\dot{m}}$ respectivement le travail technique et les quantités de chaleur par unité de masse sortant/entrant dans le système, on aboutit à l'équation qui constitue la référence dans les bilans énergétiques des systèmes ouverts :

$$h_{ts} - h_{te} = w_t + \sum_i q_i \tag{I.22}$$

En résumé, l'équation générale de bilan des systèmes ouverts, qui inclut les deux bilans précédemment exprimés, peut être mise sous la forme très générale :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \varphi_e \dot{m}_e - \varphi_s \dot{m}_s + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{Echange de } \Phi \text{ sans matière}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{prod./dissip. de } \Phi}{\Delta t}$$

où Φ symbolise une grandeur pouvant être la matière, ou l'énergie et φ étant la valeur massique[1] de Φ.
Cette équation permet de calculer tous les échanges énergétiques (travail, échanges thermiques) dans les machines thermiques, qu'elles soient à fluide moteur inerte (compresseurs, machines à vapeur, machines frigorifiques, pompes à chaleur …) ou réactif. C'est donc à elle qu'il sera fait appel plus spécifiquement pour évaluer les performances énergétiques de systèmes propulsifs. Dans le cas de gaz, l'énergie potentielle e_p est en général négligeable de sorte que :

$$h_t = h + \frac{1}{2} V^2 \tag{I.23}$$

c. Les écoulements dans les tuyères

On considèrera ici la détente d'un fluide initialement sans vitesse dans une chambre (Ch) où les caractéristiques thermodynamiques (température et pression) sont connues. Le fluide s'écoule isentropiquement dans la tuyère (Figure I.2) placée dans un environnement à la pression p_a.
Outre l'état amont dans la chambre, les points remarquables de ce système, sont le col (point sonique) et l'éjection (Ej).
On appliquera ici les équations de conservation qui viennent d'être présentées.

---

[1] Si Φ représente la masse, φ sera égal à l'unité et on limitera le membre de droite aux seuls deux premiers termes.

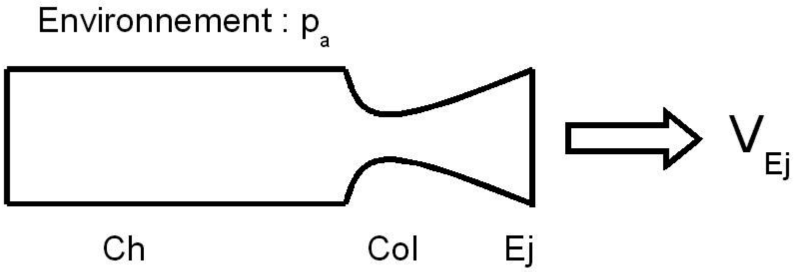

Figure I.2- Points caractéristiques d'une tuyère

Bilan énergétique

On considère deux sections distinctes x et y de cette tuyère et on écrit la conservation de l'enthalpie totale (l'indice t sera utilisé pour désigner toutes les grandeurs totales) :

$$h_t = h_x + \frac{1}{2}V_x^2 = h_y + \frac{1}{2}V_y^2 \qquad (I.24)$$

dont on déduit que :

$$h_x - h_y = +\frac{1}{2}\left(V_y^2 - V_x^2\right) = c_p\left(T_x - T_y\right) \qquad (I.25)$$

L'écoulement étant supposé isentropique, soit :

$$\frac{T_x}{T_y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \qquad (I.26)$$

On aura, en tout point de l'écoulement :

$$T_t = T + \frac{V^2}{2c_p} \qquad (I.27)$$

Ou, en introduisant le nombre de Mach $M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma R_{gaz} T}}$, R_{gaz} étant la constante du gaz pris en compte:

$$T_t = T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right) \qquad (I.28)$$

Ici encore, l'hypothèse d'une évolution isentropique permet d'écrire :

$$p_t = p\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \qquad (I.29)$$

Ces lois s'appliquent donc à tout point de l'écoulement et, en particulier, à la chambre où, par hypothèse, la vitesse de l'écoulement est nulle. Les températures et pression qui y règnent ont des valeurs facilement calculables, voire, sont des données du problème. Ceci signifie que, dans ce cas, les grandeurs totales seront précisément les conditions régnant dans la chambre $p_t=p_{ch}=C^{te}$, et $T_t=T_{ch}=C^{te}$. Ceci revient à dire qu'en tout point de l'écoulement :

$$T = \frac{T_{ch}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \tag{I.30}$$

$$p = p_{ch}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \tag{I.31}$$

Les rapports des sections x et y de la tuyère sont en relation avec le rapport des nombres de Mach de l'écoulement en ces points :

$$\frac{A_y}{A_x} = \frac{M_x}{M_y}\sqrt{\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_y^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_x^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}} \tag{I.32}$$

On appliquera ces relations de conservation à la section d'éjection et on obtiendra :

$$V_{Ej} = \sqrt{2\left(h_{ch}-h_{Ej}\right)+V_{ch}^2} = \sqrt{2c_pT_{ch}\left(1-\frac{T_{Ej}}{T_{ch}}\right)+V_{ch}^2} \tag{I.33}$$

Il convient de préciser que cette égalité est subordonnée à l'hypothèse que c_p varie peu entre la chambre et l'éjection, ce qui, en toute rigueur est une approximation assez grossière car la variation de pression et, en conséquence, celle de la température, est notable. On prendra soin, dans ce cas, de choisir une valeur moyenne de c_p sur cet écoulement. En revanche, s'agissant de deux points voisins de l'écoulement, cette relation est tout à fait acceptable. Soit, exprimé en termes de rapport de pressions :

$$V_{Ej} = \sqrt{2\frac{\gamma R_{gaz}T_{ch}}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p_{Ej}}{p_{ch}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]+V_{ch}^2} \tag{I.34}$$

On admet, par hypothèse, que la vitesse de l'écoulement dans la chambre est nulle ($V_{ch}=0$), ce qui permet d'écrire :

$$V_{Ej} = \sqrt{2\frac{\gamma R_{gaz}T_{ch}}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p_{Ej}}{p_{ch}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \tag{I.35}$$

On observe alors que la vitesse d'éjection maximale est obtenue lorsque l'éjection se fait dans le vide ($p_{ej}=0$) et, dans ce cas :