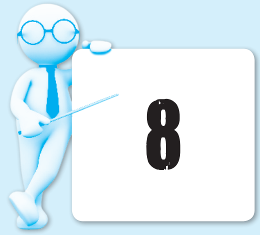
Connaître les ensembles de nombres



Quand on ne sait pas !

- Tous les nombres connus en classe de seconde sont appelés nombres **réels.** Ils forment un ensemble appelé ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$.

  Parmi ceux-ci, il existe des réels particuliers qui forment d'autres ensembles.

- L'ensemble des nombres **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble de tous les entiers supérieurs ou égaux à zéro. Ainsi, $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$.

  EXEMPLE 1

  ▸ 5 est un entier naturel. On dit que 5 appartient à $\mathbb{N}$ et on note $5\in\mathbb{N}$.

  ▸ $-7{,}9$ n'est pas un entier naturel. On dit que $-7{,}9$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$ et on note $-7{,}9\notin\mathbb{N}$.

  L'ensemble des entiers naturels, privé de 0, autrement dit des entiers naturels strictement positifs est noté $\mathbb{N}^*$.

- L'ensemble des nombres **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble de tous les entiers inférieurs ou supérieurs ou égaux à zéro.

  Ainsi $\mathbb{Z}=\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$.

- L'ensemble des nombres **décimaux**, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble de tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction où le numérateur est un entier relatif et le dénominateur est une puissance de 10, c'est-à-dire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$, où $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$.

  EXEMPLE 2

  ▸ $3{,}14\in\mathbb{D}$ car $3{,}14=\dfrac{314}{100}$. Le numérateur 314 est un entier et le dénominateur 100 est une puissance de 10 $\left(100=10^2\right)$.

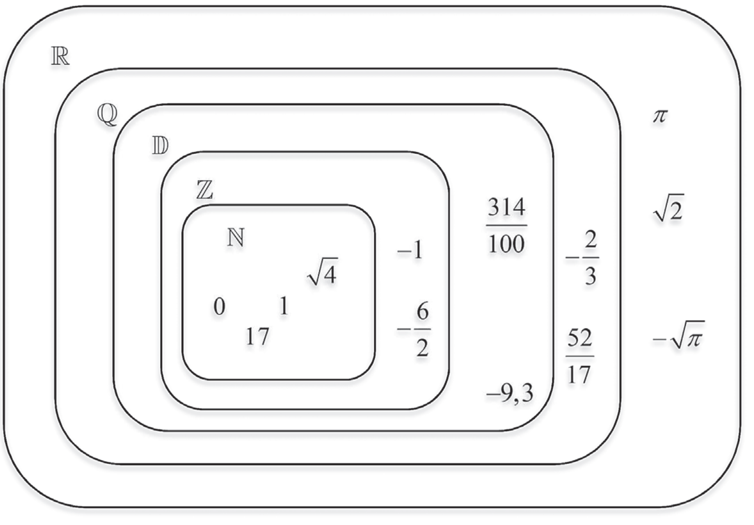
- L'ensemble des nombres **rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble de tous les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction où le numérateur est un entier relatif et le dénominateur est un entier naturel non nul, c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

- Un nombre **irrationnel** est un nombre réel qui n'est pas rationnel, c'est-à-dire qui ne peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers.

EXEMPLE 3 $\sqrt{2}, \pi, -\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels.

- On remarque que tous les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs. On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est **inclus dans** l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

De même on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Ce qui est illustré par le schéma suivant :



Sur ce schéma, on observe par exemple que :

- $-\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ et aussi que $-\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$ car l'ensemble $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$. Par contre, $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$ et ainsi $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ et $-\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$.
- $\sqrt{4} \in \mathbb{N}$ car $\sqrt{4} = 2$!

Que faire ?

- **Déterminer la nature d'un nombre**, c'est déterminer le plus petit ensemble (au sens de l'inclusion que l'on observe sur le schéma) auquel il appartient.

EXEMPLE 4 Quelle est la nature de $\frac{-84}{7}$?

On sait déjà que $\frac{-84}{7}$ est un nombre réel.

Son écriture sous forme de fraction nous permet de dire qu'il est rationnel.

Après simplification, on trouve que $\frac{-84}{7}=-12$. Ainsi $\frac{-84}{7}$ appartient à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Comme il est négatif, il n'appartient pas à $\mathbb{N}$.

Ainsi, $\frac{-84}{7}$ est un entier relatif.

- **Pour montrer qu'un nombre est décimal ou non,** on peut :
  - montrer que sa partie décimale est finie, et dans ce cas le nombre est un nombre décimal.

    EXEMPLE 5 $\frac{17}{4}$ est décimal car $\frac{17}{4}=4,25$. La partie décimale de $4,25$ est $0,25$ qui ne comporte que deux chiffres après la virgule.

    On remarque aussi facilement que $4,25=\frac{425}{100}=\frac{425}{10^2}$ qui est, d'après la définition, un nombre décimal.
  - Utiliser la propriété caractéristique des nombres décimaux suivante :

    Un nombre est un nombre décimal si, et seulement si, sous sa forme de fraction irréductible, le dénominateur peut s'écrire comme un produit qui ne comporte que des puissances de 2 et/ou des puissances de 5 et/ou des puissances de 10.

    EXEMPLE 6 $\frac{17}{4}$ est décimal car $\frac{17}{4}=\frac{17}{2^2}$, qui est une fraction irréductible dont le dénominateur ne comporte qu'une puissance de 2.

    $\frac{1}{3}\notin\mathbb{D}$ car $\frac{1}{3}$ est irréductible et qu'il y a un 3 au dénominateur (c'est-à-dire un autre nombre que 2, 5 ou 10).

Conseils

- Il est impératif de maîtriser les fiches du chapitre : « Ce qu'il faut savoir en calculs » : développer, factoriser, fractions, quotients, racines carrées et puissances sont des notions à très bien connaître.
- Ne pas conclure trop vite quant à la nature d'un nombre. Par exemple, dans l'écriture $\frac{3\pi}{2\pi}$, la présence du nombre π qui est irrationnel pourrait nous amener à croire que la nature de $\frac{3\pi}{2\pi}$ n'est que « nombre réel », mais après simplification $\frac{3\pi}{2\pi}=\frac{3}{2}$, et la nature de $\frac{3}{2}$ est décimale.
- Lorsqu'il est juste écrit dans un énoncé : « le nombre est un nombre entier », cela signifie « le nombre est un nombre entier **relatif** ».

Exemples traités

EXEMPLE 6 Déterminer la nature des nombres suivants :

$$A=\frac{\sqrt{25}}{4}\ ;\ B=-\frac{3^2\times 2}{27\times 35}\ ;\ C=\sqrt{10^2-8^2}\ ;\ D=-\frac{147}{7}$$

SOLUTION

- $A=\frac{\sqrt{25}}{4}=\frac{5}{4}=1,25$. Ainsi A est un nombre décimal. En effet $1,25=\frac{125}{100}=\frac{125}{10^2}$.
On peut aussi remarquer que $\frac{5}{4}=\frac{5}{2^2}$ pour montrer que A est décimal. En effet dans la forme irréductible de A, il n'y a qu'une puissance de 2 au dénominateur ce qui prouve que A est décimal.
- $B=-\frac{3^2\times 2}{27\times 35}=-\frac{9\times 2}{9\times 3\times 5\times 7}=-\frac{2}{3\times 5\times 7}=-\frac{2}{105}$. Ainsi B est rationnel, mais il n'est pas décimal car dans le dénominateur de sa forme irréductible, il y a des facteurs différents de 2 ou de 5 ou de 10 (qui sont 3 et 7).
- $C=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$ donc C est un nombre entier naturel.
- $D=-\frac{147}{7}=-\frac{21\times 7}{7}=-21$ donc D est un nombre entier relatif.

EXEMPLE 7 Déterminer à quel(s) ensemble(s) appartiennent les nombres suivants :

$$E=\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}\ ;\ F=\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)^2\ ;\ G=\frac{20\pi-10}{22\pi-11}$$

SOLUTION

- $E=\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{36\times 2}}{\sqrt{25\times 2}}=\frac{\sqrt{36}\times\sqrt{2}}{\sqrt{25}\times\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\frac{6}{5}=1,2=\frac{12}{10}$. Ainsi E est décimal, et on en déduit que $E\in\mathbb{D}$, $E\in\mathbb{Q}$ et $E\in\mathbb{R}$.

- $F=\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)^2=\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}\times\sqrt{12}+\sqrt{12}^2=3+2\sqrt{3\times 12}+12$

$$=3+2\sqrt{36}+12=3+2\times 6+12=3+12+12=27$$

Ainsi F est un nombre entier naturel, et on peut écrire :

$$F\in\mathbb{N},\ F\in\mathbb{Z},\ F\in\mathbb{D},\ F\in\mathbb{Q}\ \text{et}\ F\in\mathbb{R}.$$

Une autre façon de calculer F est :

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{12}\right)^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{4\times 3}\right)^2=\left(\sqrt{3}+2\sqrt{3}\right)^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2$$

$$=3^2\times\sqrt{3}^2=9\times 3=27.$$

- $G=\frac{20\pi-10}{22\pi-11}=\frac{10(2\pi-1)}{11(2\pi-1)}=\frac{10}{11}$. Ainsi G est un rationnel, mais non décimal car dans sa forme irréductible, il y a un 11 au dénominateur. $G\in\mathbb{Q}$ et $G\in\mathbb{R}$.

Exercices

EXERCICE 8.1 Déterminer la nature des nombres suivants :

$$H=\frac{21}{17}\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{3}\right)\ ;\ I=\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\ ;\ J=\sqrt{\frac{60^3+5^3}{10^3+9^3}}$$

EXERCICE 8.2 Compléter chaque case du tableau par $\in$ ou $\notin$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$a=-\sqrt{7}$					
$b=\dfrac{6^2\times 7}{9\times 40}$					
$c=\dfrac{\sqrt{20^2+48^2}}{5^2-3\times 2^2}$					
$d=-2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$					
$e=\left(\sqrt{\dfrac{3}{7}}+\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)^2$					

EXERCICE 8.3 Montrer que la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 8.1	Simplifier l'écriture de chaque nombre.
EXERCICE 8.2	Commencer par calculer les nombres.
EXERCICE 8.3	Comme q_1 et q_2 sont deux nombres rationnels, il existe quatre entiers a,b,c,d tels que $q_1=\dfrac{a}{b}$ et $q_2=\dfrac{c}{d}$, avec $b\in\mathbb{N}^*$ et $d\in\mathbb{N}^*$. Il reste à calculer q_1+q_2.

Solutions des exercices

EXERCICE 8.1

$H=\dfrac{21}{17}\left(\dfrac{5}{7}+\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{21}{17}\left(\dfrac{15+14}{21}\right)=\dfrac{21}{17}\times\dfrac{29}{21}=\dfrac{29}{17}$ donc H est un rationnel.

$I=\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2=7-3=4$ donc I est un entier naturel.

$J=\sqrt{\dfrac{60^3+5^3}{10^3+9^3}}=\sqrt{\dfrac{216125}{1729}}=\sqrt{125}=\sqrt{25\times 5}=5\sqrt{5}$ donc J est un nombre réel.

Exercice 8.2

$$b=\frac{6^2\times 7}{9\times 40}=\frac{36\times 7}{9\times 40}=\frac{9\times 4\times 7}{9\times 4\times 10}=\frac{7}{10}.$$

$$c=\frac{\sqrt{20^2+48^2}}{5^2-3\times 2^2}=\frac{\sqrt{400+2304}}{25-3\times 4}=\frac{\sqrt{2704}}{25-12}=\frac{52}{13}=4.$$

$$d=-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=-2\left(\frac{3+2+1}{6}\right)=-2\times 1=-2.$$

$$e=\left(\sqrt{\frac{3}{7}}+\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2+2\times\sqrt{\frac{3}{7}}\times\sqrt{\frac{7}{3}}+\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=\frac{3}{7}+2+\frac{7}{3}=\frac{100}{21}.$$

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$a=-\sqrt{7}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$b=\dfrac{6^2\times 7}{9\times 40}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$c=\dfrac{\sqrt{20^2+48^2}}{5^2-3\times 2^2}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$d=-2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$e=\left(\sqrt{\dfrac{3}{7}}+\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)^2$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$

Exercice 8.3

q_1 et q_2 sont deux nombres rationnels donc il existe quatre entiers a,b,c,d tels que $q_1=\dfrac{a}{b}$ et $q_2=\dfrac{c}{d}$, avec $b\in\mathbb{N}^*$ et $d\in\mathbb{N}^*$.

$q_1+q_2=\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$. Or $ad+bc\in\mathbb{Z}$ car a,b,c et d sont entiers. De même, bd est un entier naturel strictement positif (car b et d sont des entiers naturels strictement positifs). On conclut que $\dfrac{ad+bc}{bd}$ est un nombre rationnel.

Ainsi, la somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

Solutions

9 Reconnaître des multiples, des diviseurs, des nombres premiers

Quand on ne sait pas !

Soient a et b deux entiers (naturels ou relatifs).

- On dit que a est un **multiple de** b s'il existe un entier q (naturel ou relatif) tel que $a = b \times q$.

  On dit aussi que b est un **diviseur de** a ou que a est **divisible par** b.

  EXEMPLE 1

  - 42 est un multiple de 6 car $42 = 6 \times 7$ et 6 est un diviseur de 42.
  - 5 n'est pas un diviseur de 13, on pourrait le croire car on a $5 \times 2{,}6 = 13$, mais $2{,}6$ n'est pas entier.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$. $(n+2)(n+3) = n^2 + 3n + 2n + 6 = n^2 + 5n + 6$.

    Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 5n + 6$ est divisible par $n+2$ (et aussi par $n+3$) car $n+2$ et $n+3$ sont entiers.

- On dit qu'un nombre entier est **pair** s'il est multiple de 2. Ainsi tout nombre pair s'écrit sous la forme $2n$, où n est un entier.

- On dit qu'un nombre entier est **impair** s'il n'est pas divisible par 2. Ainsi tout nombre impair s'écrit alors sous la forme $2n+1$, où n est un entier.

- Dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, on dit qu'un **entier naturel** est **premier** s'il n'a que deux diviseurs : 1 **et** lui-même.

  EXEMPLE 2

  - 5 est un nombre premier.
  - 4 n'est pas un nombre premier car il est divisible par 1, 2 et 4.
  - 1 n'est pas premier car il ne possède qu'un seul diviseur dans $\mathbb{N}$.