Chapitre 1
Les nombres

1. Les entiers naturels

Notre relation avec les nombres commence dès la petite enfance avec l'acquisition de la capacité à compter les choses. On apprend à compter « jusqu'à dix », puis « jusqu'à cent » et ainsi de suite. Ce comptage se fait avec des nombres « entiers » car le petit enfant ne compte que des objets « entiers » sans les découper en morceaux.

En mathématiques, ces premiers nombres que l'on manipule sont appelés entiers naturels. Ainsi 0, 1, 2, 345, 1 077 sont des entiers naturels. L'ensemble des nombres entiers naturels est appelé $\mathbb{N}$. Cet ensemble est infini puisqu'il suffit d'ajouter 1 au dernier nombre considéré pour en créer un nouveau.

L'étude des entiers naturels est une discipline toujours en vigueur aujourd'hui, l'arithmétique, dont nous donnerons un aperçu dans le chapitre 2.

Après le comptage, on introduit le calcul à l'école primaire et les quatre opérations : addition, soustraction, multiplication et division. Nous ne détaillerons pas ici ces différentes manipulations, considérées comme acquises.

L'addition et la multiplication ne posent pas de problèmes particuliers en termes algébriques.

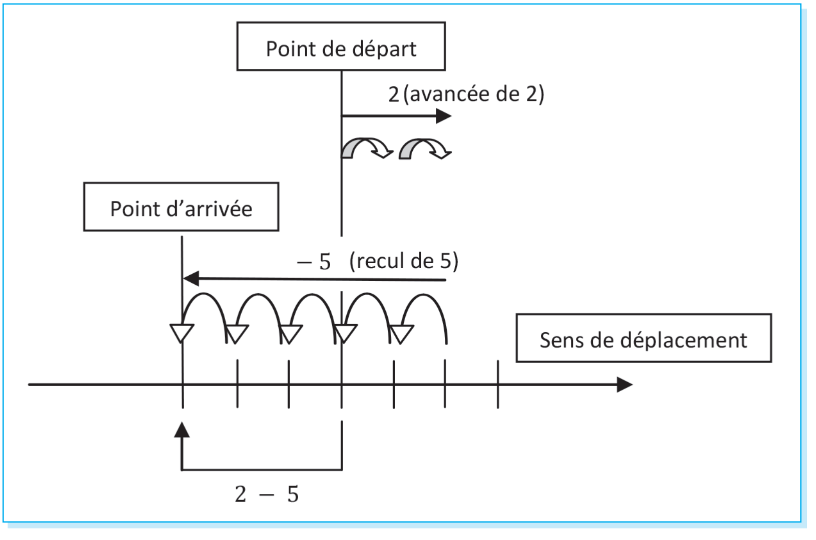
La soustraction pose un problème à l'écolier. En effet, certaines soustractions sont impossibles au sein de l'ensemble des entiers naturels. Ainsi comment calculer $2-5$?

De même, la division n'est pas toujours possible dans l'ensemble $\mathbb{N}$. Comment diviser 2 par 3 ?

Mener à bien ces calculs et être capable de nommer leur résultat nécessite l'introduction d'autres nombres.

2. Les entiers relatifs

La soustraction $2-5$ peut être vue de manière intuitive comme un déplacement sur une règle graduée ou sur un parcours de type « jeu de l'oie ». J'avance de 2 graduations ou de 2 cases et je recule de 5 graduations ou de 5 cases. Je me retrouve donc 3 graduations ou 3 cases avant mon point de départ. En mathématiques, on va donc considérer que le déplacement est de 3 et on va indiquer que l'on a « reculé » grâce au signe « – ».



On obtient donc $2-5=-3$.

On vient donc de créer -3, qui est un nombre négatif, que l'on lit « moins trois ».

À noter que dans l'égalité $2-5=-3$, les deux signes « – » n'ont pas la même signification. Le premier indique une opération, la soustraction. Le deuxième indique le signe du nombre.

On notera également que $5-2=+3=3$. En effet, si on adopte la même logique intuitive que ci-dessus, $5-2$ correspond à un déplacement de 3 « vers l'avant ». Puisque l'on indique « – » lorsqu'on « recule », il est cohérent d'indiquer « + »

lorsqu'on « avance ». Par souci d'économie, on considère que le « + » n'est pas obligatoire et que son absence indique un nombre positif.

En ajoutant un signe « – » devant tout nombre entier naturel, on obtient un entier négatif. L'ensemble des nombres entiers, qu'ils soient positifs ou négatifs s'appelle l'ensemble des entiers relatifs. On l'appelle $\mathbb{Z}$.

Contrairement aux entiers naturels, les entiers relatifs constituent donc un ensemble dans lequel toutes les additions et soustractions sont possibles.

Pour aller plus loin

Ce dernier point, rendre les opérations possibles, peut paraître anodin mais il est essentiel en algèbre car il introduit la notion de loi de composition interne à un ensemble qui permet la définition des premières structures algébriques. Le lecteur qui désire se documenter sur ce sujet pourra se référer à des ouvrages d'algèbre de l'enseignement supérieur.

Un entier relatif se compose donc d'un nombre entier naturel précédé d'un signe, ce signe pouvant être omis s'il est positif. Le nombre entier naturel se nomme distance à zéro au collège et valeur absolue par la suite. Ainsi, 567 a pour distance à zéro 567 et –12 a pour distance à zéro 12. La valeur absolue se note entre deux traits verticaux. Ainsi $|567| = 567$ et $|-12| = 12$

Vocabulaire complémentaire

L'opposé d'un nombre est un nombre qui a la même distance à zéro (même valeur absolue) et un signe contraire. Par exemple –3 est l'opposé de 3, 5 est l'opposé de –5.

Remarque On note l'opposé également avec un signe « – », ce qui ne simplifie pas forcément la compréhension de l'écriture mathématique. En effet –3 désigne à la fois le nombre négatif (lu « moins trois ») et l'opposé du nombre 3. L'écriture $-(-3)$ désigne l'opposé du nombre –3.D'après ce qui précède, il s'agit du nombre qui a la même valeur absolue que –3 et un signe opposé, c'est-à-dire +3 ou plus simplement 3. On a donc $-(-3) = 3$, le premier « – » signifiant « opposé » et le deuxième étant le signe du nombre négatif –3.

3. Les nombres décimaux

Au primaire, on apprend la division « à virgule » et on introduit les nombres décimaux. Ainsi $7 \div 2 = 3{,}5$. Le nombre décimal est composé d'une partie entière située avant la virgule et d'une partie décimale, située après la virgule.

L'ensemble des nombres décimaux est appelé $\mathbb{D}$.

L'écriture décimale est pratique et permet en outre de préciser la compréhension de la division à l'école. L'enfant peut désormais découper les objets en morceaux.

On verra plus avant dans ce livre, à la fin du chapitre 3, la manière plus « mathématique » de définir un nombre décimal.

Cependant, algébriquement parlant, les nombres décimaux ne présentent pas un très grand intérêt. En particulier, ils ne permettent pas de donner le résultat de toutes les divisions. Par exemple 2 divisé par 3 ne peut pas s'écrire sous forme décimale, puisque la suite des nombres figurant après la virgule est infinie. On peut rencontrer la notation 0,666… les points de suspension signifiant que l'on répète le « 6 » indéfiniment. Mais ce système ne peut représenter tous les quotients. Par exemple un nombre dans lequel le schéma qui se répète après la virgule comporte un nombre élevé de chiffres ne peut en pratique pas être représenté de cette manière.

4. Les nombres rationnels

Il faut donc introduire de nouveaux nombres, que l'on appelle les nombres rationnels. On écrit alors $\frac{2}{3}$, qui se lit « deux tiers » ou « deux sur trois ».
$\frac{2}{3}$ est donc le nombre créé pour indiquer le résultat de la division de 2 par 3.
En d'autres termes, $\frac{2}{3}$ est le nombre qui multiplié par 3 donne 2.

Pour ce qui est du vocabulaire, le trait horizontal s'appelle un trait de fraction, le nombre situé au-dessus est le numérateur et le nombre situé au-dessous est le dénominateur. Pour éviter de confondre ces deux termes, il faut comprendre leur signification. $\frac{5}{7}$ se lit « cinq septièmes ». Le nombre situé au-dessous du trait de fraction donne donc son nom au nombre rationnel (il s'agit de septièmes), d'où l'appellation de dénominateur (il « nomme »). Le nombre situé au-dessus du trait de fraction indique combien le nombre rationnel contient de septièmes, il s'agit du numérateur (il « numérote »).

Un nombre rationnel est donc une fraction, c'est-à-dire le quotient d'un nombre entier par un nombre entier. À noter que ces nombres entiers peuvent être positifs ou négatifs. $\frac{-5}{7}$ désigne ainsi le résultat de la division de –5 par 7. On verra plus avant dans ce livre, dans le paragraphe 2.2 du chapitre 3, comment mener des calculs avec des nombres négatifs et avec des fractions.

L'ensemble des nombres rationnels est appelé $\mathbb{Q}$. Il est celui qui permet de rendre possible toutes les divisions de nombres entiers.

Pour aller plus loin

De même que pour l'introduction de l'ensemble $\mathbb{Z}$, ce point est également essentiel en algèbre car il introduit la notion de corps. Le lecteur qui désire se documenter sur ce sujet pourra se référer à des ouvrages d'algèbre de l'enseignement supérieur.

Remarque On généralise la notion de fraction à celle d'écriture fractionnaire, qui consiste à utiliser un trait de fraction pour indiquer une division. Ainsi $2{,}5 \div 1{,}6 = \frac{2{,}5}{1{,}6} = 1{,}5625$. $\frac{2{,}5}{1{,}6}$ est une écriture fractionnaire mais n'est pas une fraction, puisque 2,5 et 1,6 ne sont pas des entiers.

5. Les nombres réels

Bien que résolvant le problème de la division, l'ensemble $\mathbb{Q}$ ne permet pas de décrire tous les nombres. En effet, certains nombres ne sont pas le résultat de la division d'un nombre entier par un nombre entier.

Les nombres qui ne sont pas rationnels s'appellent irrationnels. On peut par exemple citer le nombre π (lire « pi »), connu depuis l'antiquité, qui intervient notamment dans le calcul du périmètre d'un cercle. Un autre exemple de nombre irrationnel est $\sqrt{2}$ (lire « racine carrée de 2 » ou « racine de 2 »). On verra plus avant dans ce livre, dans le paragraphe 4.1.1. du chapitre 4, la signification d'une racine carrée. Le caractère irrationnel de $\sqrt{2}$ est démontré dans le paragraphe 5 du chapitre 9.

À noter qu'il existe une infinité de nombres irrationnels et qu'entre deux nombres rationnels, on peut toujours trouver des nombres irrationnels. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est donc « à trous ».

L'ensemble des nombres rationnels et irrationnels constitue l'ensemble des nombres réels. Il est appelé $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ permet de « compléter » l'ensemble des nombres. Il n'existe alors plus de « trou » entre deux nombres.

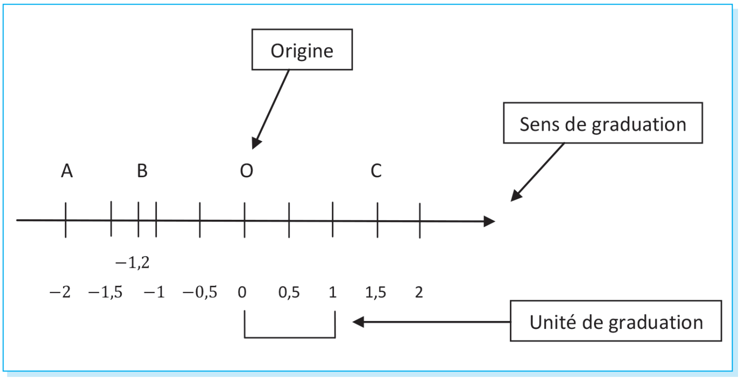
Pour aller plus loin

L'ensemble $\mathbb{R}$ est la base de la branche des mathématiques appelée analyse, qui s'intéresse en particulier à ce qu'il se passe « à la limite » de l'ensemble des nombres, quand les nombres étudiés ou intervenant dans des calculs deviennent infiniment petits ou infiniment grands. Nous aborderons quelques notions d'analyse, en particulier dans le chapitre sur les fonctions et dans celui sur les suites. Le lecteur qui désire se documenter sur ce sujet pourra se référer à des ouvrages d'analyse de l'enseignement supérieur.

6. Repérage

Une utilisation des nombres qui nous sera utile par la suite est le repérage de points sur une représentation graphique.

6.1. Repérage sur un axe gradué



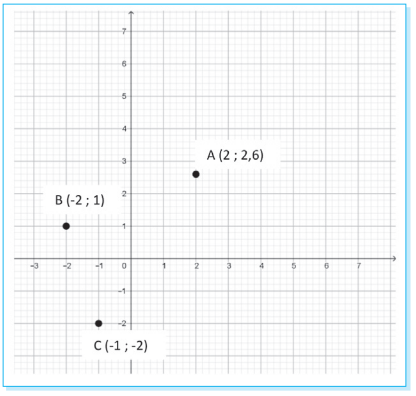
Un axe gradué est défini par :

- une origine, à partir de laquelle on compte les graduations, ici le point O ;
- une unité de graduation : la longueur séparant la graduation 0 de la graduation 1 ;
- un sens de graduation, qui permet de déterminer dans quel sens on compte positivement.

Un point est repéré sur l'axe par un nombre appelé abscisse. Dans le schéma ci-dessus, A a pour abscisse –2, B a pour abscisse –1,2 et C a pour abscisse 1,5.

6.2. Repérage en deux dimensions

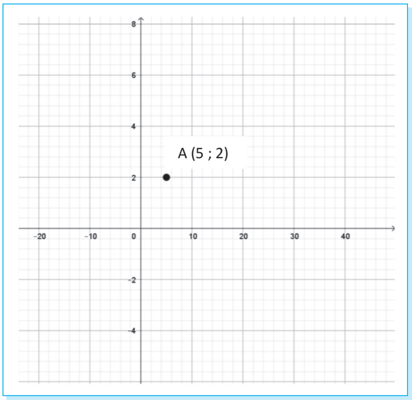
Le repérage sur une surface plane nécessite deux axes gradués. L'axe horizontal s'appelle l'axe des abscisses. Le second axe est celui des ordonnées. Un point est alors repéré par ses coordonnées, que l'on indique entre parenthèses, séparées par un point-virgule. L'abscisse est indiquée en premier.



Dans la figure précédente, le point A a pour coordonnées (2 ; 2,6), le point B a pour abscisse –2 et le point C a pour ordonnée –2.

Vocabulaire complémentaire

Si les deux axes sont perpendiculaires et utilisent la même unité de graduation, comme dans la figure ci-dessus, on dit que le repère est orthonormé. Si les deux axes sont perpendiculaires mais n'utilisent pas la même unité de graduation, on parle de repère orthogonal. À titre d'illustration, voici un exemple de repère orthogonal, non orthonormé (l'unité sur l'axe des ordonnées est cinq fois plus grande que celle utilisée sur l'axe des abscisses) :



7. Comparaison

Les nombres peuvent être comparés entre eux. Les différents symboles utilisés pour les comparer sont les suivants :

- $=$ « égal »

  Exemple $3 \times 2 = 6$ « le produit de 3 par 2 est égal à 6 »
- $\neq$ « non égal »

  Exemple $3 + 2 \neq 6$ « la somme de 3 et de 2 n'est pas égale à 6 »
- $<$ « inférieur (ou strictement inférieur) »

  Exemple $10 < 13$ « 10 est (strictement) inférieur à 13 »
- $\leq$ « inférieur ou égal »

  Exemples $10 \leq 13$ « 10 est inférieur ou égal à 13 » (puisque inférieur)

  $10 \leq 10$ « 10 est inférieur ou égal à 10 » (puisque égal)
- $>$ « supérieur (ou strictement supérieur) »

  Exemple $13 > 10$ « 13 est (strictement) supérieur à 10 »
- $\geq$ « supérieur ou égal »

  Exemples $13 \geq 10$ « 13 est supérieur ou égal à 10 » (puisque supérieur)

  $10 \geq 10$ « 10 est supérieur ou égal à 10 » (puisque égal)

Note On pourrait questionner l'utilité des symboles $\leq$ et $\geq$ puisque l'on dispose de symboles donnant plus de précisions : $=$, $<$ et $>$. Leur intérêt vient du fait que dans la vie réelle, une situation n'est pas forcément modélisée par une égalité ou par une inégalité stricte (ne permettant pas l'égalité). À titre d'illustration, un parc d'attractions peut interdire l'accès à un manège aux enfants dont la taille est inférieure à 1,40 m. On peut exprimer cette contrainte en langage mathématique par :

➞ Les enfants dont la taille T vérifie « $T < 1{,}40$ m » n'ont pas accès au manège.

➞ Les enfants dont la taille T vérifie « $T \geq 1{,}40$ m » ont accès au manège.

Dans le 1er cas l'inégalité est stricte car un enfant de 1,40 m ne doit pas vérifier la condition. Dans le second cas, l'inégalité doit être large (permettant l'égalité) car un enfant de 1,40 m doit vérifier la condition.

Une fois que l'on peut comparer des nombres, on peut les classer par ordre croissant (du plus petit au plus grand) ou par ordre décroissant (du plus grand au plus petit).

Exemple de classement par ordre croissant :

$$-1\,000 < -2{,}7 < -2 < -1{,}5 < 2{,}5 < 678$$