

# Table des matières

<b>I</b>	<b>STRUCTURES ALGÈBRIQUES ÉLÉMENTAIRES</b>	<b>15</b>
<b>1.</b>	<b>Groupes</b>	<b>17</b>
1.1.	Généralités . . . . .	17
1.1.1.	Premières définitions . . . . .	17
1.1.2.	Sous-groupes distingués, groupes quotients, morphismes . . . . .	19
1.1.3.	Théorèmes d'isomorphisme . . . . .	20
1.2.	Opération d'un groupe sur un ensemble . . . . .	21
1.2.1.	Généralités . . . . .	21
1.2.2.	Action d'un groupe fini sur un ensemble fini . . . . .	24
1.3.	Groupe symétrique . . . . .	28
1.3.1.	Généralités . . . . .	28
1.3.2.	Groupe alterné . . . . .	29
1.4.	Produits directs et semi-directs . . . . .	30
1.4.1.	Heuristique . . . . .	30
1.4.2.	Produits directs . . . . .	30
1.4.3.	Produits semi-directs . . . . .	31
1.4.4.	Application : détermination des groupes d'ordre $pq$ pour $p, q$ premiers, $p < q$ . . . . .	33
1.4.5.	Un critère de reconnaissance d'un groupe simple : le lemme d'Iwasawa . . . . .	34
1.5.	Groupes finis de petit cardinal . . . . .	34
<b>2.</b>	<b>Anneaux</b>	<b>35</b>
2.1.	Généralités . . . . .	35
2.1.1.	Premières définitions . . . . .	35
2.1.2.	Idéaux, anneaux quotients, morphismes d'anneaux . . . . .	36
2.1.3.	Théorèmes d'isomorphisme . . . . .	38
2.2.	Algèbre commutative . . . . .	40
2.2.1.	Anneaux commutatifs . . . . .	40
2.2.2.	Domaines intègres . . . . .	41
2.2.3.	Domaines à pgcd . . . . .	46
2.2.4.	Domaines à factorisation unique . . . . .	47
2.2.5.	Domaines principaux . . . . .	48
2.2.6.	Domaines euclidiens . . . . .	51
2.3.	Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	52
2.3.1.	Structure de groupe additif . . . . .	52
2.3.2.	Groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . . .	52
2.3.3.	Liens avec les polynômes cyclotomiques . . . . .	53
2.3.4.	Applications . . . . .	53

<b>3. Corps</b>	<b>55</b>
3.1. Généralités . . . . .	55
3.2. Extensions de corps . . . . .	56
3.2.1. Généralités . . . . .	56
3.2.2. Extensions algébriques et transcendantes . . . . .	56
3.2.3. Extensions algébriques de degré fini . . . . .	58
3.3. Corps de rupture, corps de décomposition d'un polynôme . . . . .	59
3.3.1. Corps de rupture d'un polynôme irréductible . . . . .	59
3.3.2. Corps de décomposition d'un polynôme . . . . .	60
3.4. Clôture algébrique . . . . .	61
3.5. Extensions normales . . . . .	63
3.6. Extensions séparables . . . . .	64
3.6.1. Généralités . . . . .	64
3.6.2. Théorème de l'élément primitif . . . . .	65
3.6.3. Corps parfaits . . . . .	65
3.7. Corps finis . . . . .	66
3.7.1. Généralités . . . . .	66
3.7.2. Caractérisation des corps finis . . . . .	67
3.7.3. Propriétés des corps finis . . . . .	68
3.7.4. Clôture algébrique d'un corps fini . . . . .	69
3.8. Racines de l'unité . . . . .	69
3.8.1. Généralités . . . . .	69
3.8.2. Racines $n$ -ièmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$ . . . . .	70
<b>4. Espaces vectoriels</b>	<b>71</b>
4.1. Définition . . . . .	71
4.2. Théorie de la dimension . . . . .	72
4.2.1. Définitions . . . . .	72
4.2.2. Existence de bases . . . . .	72
4.3. Sous-espaces vectoriels . . . . .	73
4.3.1. Sommes de s.e.v. . . . .	73
4.3.2. Supplémentaire d'un s.e.v. . . . .	74
4.4. Applications linéaires et dualité . . . . .	75
4.4.1. Généralités . . . . .	75
4.4.2. Dualité . . . . .	77
<b>II TOPOLOGIE ENSEMBLISTE</b>	<b>81</b>
<b>5. Espaces topologiques</b>	<b>83</b>
5.1. Heuristique : les espaces métriques . . . . .	83
5.1.1. Définition . . . . .	83
5.1.2. Ouverts . . . . .	83
5.1.3. Voisinages . . . . .	84
5.1.4. Continuité . . . . .	84
5.2. Espaces topologiques . . . . .	85
5.2.1. Définition . . . . .	85
5.2.2. Voisinages . . . . .	85
5.2.3. Intérieur et adhérence d'une partie . . . . .	86
5.2.4. Continuité . . . . .	87

5.2.5.	Homéomorphismes . . . . .	87
5.2.6.	Limites et valeurs d'adhérence . . . . .	87
5.2.7.	Espaces topologiques séparés . . . . .	88
5.3.	Espaces topologiques compacts . . . . .	89
5.3.1.	Compacité : généralités en topologie quelconque . . . . .	90
5.3.2.	Espaces localement compacts . . . . .	92
5.4.	Espaces topologiques connexes . . . . .	93
5.4.1.	Définition . . . . .	93
5.4.2.	Composantes connexes . . . . .	93
5.4.3.	Connexité par arcs . . . . .	94
5.4.4.	Connexité dans $\mathbb{R}$ . . . . .	95
<b>6.</b>	<b>Espaces métriques</b>	<b>97</b>
6.1.	Généralités dans des espaces métriques quelconques . . . . .	97
6.1.1.	Utilisation des suites dans les espaces métriques . . . . .	97
6.1.2.	Continuité uniforme . . . . .	99
6.2.	Espaces métriques complets . . . . .	100
6.3.	Espaces métriques compacts . . . . .	102
6.3.1.	Précompacité . . . . .	102
6.3.2.	Compacité . . . . .	103
6.3.3.	Les compacts de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	105
6.4.	Espaces métriques séparables . . . . .	106
6.5.	Espaces topologiques associés à un écart . . . . .	107
<b>III</b>	<b>STRUCTURES ALGÈBRIQUES TOPOLOGIQUES</b>	<b>109</b>
<b>7.</b>	<b>Espaces vectoriels topologiques</b>	<b>111</b>
7.1.	Outils fondamentaux sur les $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels . . . . .	111
7.1.1.	Semi-normes . . . . .	111
7.1.2.	Jauges . . . . .	112
7.2.	Espaces vectoriels topologiques . . . . .	114
7.2.1.	Définition . . . . .	114
7.2.2.	Applications linéaires . . . . .	115
7.2.3.	Dimension finie . . . . .	117
7.3.	Espaces vectoriels topologiques métrisables . . . . .	118
7.3.1.	Généralités . . . . .	118
7.3.2.	Théorèmes fondamentaux pour les e.v.t. complètement métrisables . . . . .	119
7.4.	Espaces vectoriels topologiques localement convexes . . . . .	120
7.4.1.	Définition . . . . .	120
7.4.2.	Applications linéaires . . . . .	121
7.5.	Espaces vectoriels topologiques localement convexes métrisables . . . . .	122
7.6.	Espaces vectoriels topologiques localement convexes normables . . . . .	123
<b>8.</b>	<b>Espaces vectoriels normés</b>	<b>125</b>
8.1.	Généralités . . . . .	125
8.2.	En dimension finie . . . . .	127
8.3.	Dualité . . . . .	128
8.3.1.	Généralités . . . . .	128
8.3.2.	Topologie faible $\sigma(E, E')$ . . . . .	130

8.3.3. Topologie faible* $\sigma(E', E)$ . . . . .	132
<b>9. Espaces de Banach remarquables</b>	<b>135</b>
9.1. Espaces réflexifs . . . . .	135
9.2. Espaces de Banach séparables . . . . .	137
9.3. Espaces uniformément convexes . . . . .	137
<b>10. Espaces de Hilbert</b>	<b>139</b>
10.1. Espaces préhilbertiens . . . . .	139
10.1.1. Définition . . . . .	139
10.1.2. Orthogonalité . . . . .	140
10.2. Espaces de Hilbert . . . . .	141
10.2.1. Définition . . . . .	141
10.2.2. Propriétés . . . . .	142
10.2.3. Bases hilbertiennes . . . . .	146
10.2.4. Théorèmes de Lax-Milgram et de Stampacchia . . . . .	148
<b>11. Algèbres de Banach</b>	<b>151</b>
11.1. Généralités . . . . .	151
11.2. Algèbres de Banach complexes . . . . .	153
11.3. Séries entières dans les algèbres de Banach . . . . .	155
11.3.1. Généralités . . . . .	155
11.3.2. Quelques règles de convergence . . . . .	156
11.3.3. L'exponentielle . . . . .	157
<b>IV ALGÈBRE COMMUTATIVE</b>	<b>159</b>
<b>12. Polynômes à une indéterminée</b>	<b>161</b>
12.1. Algèbre des polynômes à une indéterminée . . . . .	161
12.1.1. L'algèbre $A[X]$ . . . . .	161
12.1.2. Degré d'un polynôme . . . . .	161
12.1.3. Propriétés arithmétiques de l'anneau $A[X]$ . . . . .	162
12.2. Fonction polynôme . . . . .	163
12.3. Irréductibilité . . . . .	164
12.3.1. Généralités . . . . .	164
12.3.2. Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$ . . . . .	166
12.3.3. Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ . . . . .	166
12.4. Polynômes cyclotomiques . . . . .	167
12.4.1. Polynômes cyclotomiques usuels . . . . .	167
12.4.2. Polynômes cyclotomiques sur un corps $k$ quelconque . . . . .	168
12.4.3. Polynômes cyclotomiques sur $\mathbb{F}_p$ . . . . .	169
12.5. Résultant . . . . .	170
12.5.1. Définition . . . . .	170
12.5.2. Propriétés . . . . .	171
12.5.3. Lien résultant-racines . . . . .	172
12.5.4. Discriminant . . . . .	173
12.5.5. Calcul effectif du résultant par division euclidienne . . . . .	173

<b>13. Polynômes à plusieurs indéterminées</b>	<b>175</b>
13.1. Algèbre des polynômes à $n$ indéterminées . . . . .	175
13.1.1. L'algèbre $A[X_1, \dots, X_n]$ . . . . .	175
13.1.2. Degré et polynôme homogène . . . . .	176
13.1.3. Propriétés arithmétiques . . . . .	176
13.2. Fonction polynôme . . . . .	178
13.3. Polynômes symétriques . . . . .	181
13.3.1. Généralités . . . . .	181
13.3.2. Théorème de structure . . . . .	182
13.3.3. Applications . . . . .	182
<b>14. Fractions rationnelles à plusieurs indéterminées</b>	<b>185</b>
<b>V ALGÈBRE LINÉAIRE</b>	<b>187</b>
<b>15. Les espaces matriciels <math>M_{m,n}(K)</math></b>	<b>189</b>
15.1. Préliminaires . . . . .	189
15.1.1. Définitions . . . . .	189
15.1.2. Représentation matricielle d'une application linéaire en dimension finie	190
15.2. Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	191
15.2.1. Formes multi-linéaires en dimension quelconque . . . . .	191
15.2.2. Déterminant d'une famille de vecteurs . . . . .	192
15.2.3. Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	192
15.2.4. Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	193
15.2.5. Calculs de déterminants . . . . .	193
15.3. Rang d'une matrice . . . . .	194
15.3.1. Généralités . . . . .	194
15.3.2. Résolution théorique d'un système d'équations linéaires . . . . .	195
15.4. Action de Steinitz . . . . .	195
15.5. L'algèbre de Banach $M_n(\mathbb{K})$ . . . . .	196
15.5.1. Normes matricielles . . . . .	196
15.5.2. Topologie des orbites de l'action de Steinitz sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . . .	198
15.5.3. Exponentielle matricielle . . . . .	198
15.5.4. Racine carrée d'une matrice symétrique positive . . . . .	200
<b>16. Réduction des endomorphismes</b>	<b>201</b>
16.1. Généralités . . . . .	201
16.1.1. Définitions . . . . .	201
16.1.2. Polynômes d'endomorphismes . . . . .	201
16.2. Sous-espaces stables par un endomorphisme . . . . .	203
16.2.1. Généralités . . . . .	203
16.2.2. Recherche de sous-espaces stables admettant un supplémentaire stable	204
16.3. Application à la réduction d'endomorphismes . . . . .	205
16.3.1. Endomorphismes trigonalisables . . . . .	205
16.3.2. Endomorphismes diagonalisables . . . . .	206
16.3.3. Endomorphismes simples et semi-simples . . . . .	207
16.3.4. Réduction simultanée . . . . .	209
16.3.5. Étude topologique pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . . .	212

16.4. Décompositions classiques . . . . .	213
16.4.1. Décomposition de Dunford . . . . .	213
16.4.2. Décomposition de Frobenius et théorème des invariants de similitude . . . . .	214
16.4.3. Réduction de Jordan . . . . .	216
16.5. Action par conjugaison de $GL_n(K)$ sur $M_n(K)$ . . . . .	217
16.5.1. Sur un corps $K$ quelconque . . . . .	217
16.5.2. Topologie des orbites lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ . . . . .	217
16.6. Applications de la réduction . . . . .	219
16.6.1. Calcul de l'exponentielle d'une matrice . . . . .	219
16.6.2. Calcul de la puissance d'une matrice . . . . .	219
16.6.3. Résolution de suites récurrentes linéaires ou d'un système de suites récurrentes . . . . .	220
16.6.4. Résolution d'un système différentiel matriciel du premier ordre . . . . .	220
<b>17. Le groupe linéaire</b>	<b>221</b>
17.1. Généralités sur un corps $K$ quelconque . . . . .	221
17.1.1. Transvections et dilatations . . . . .	221
17.1.2. Groupe linéaire . . . . .	222
17.1.3. Groupe spécial linéaire . . . . .	223
17.1.4. Sous-groupes de $GL(E)$ . . . . .	224
17.1.5. Groupe linéaire projectif . . . . .	226
17.1.6. Isomorphismes exceptionnels . . . . .	227
17.2. Étude topologique de $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ . . . . .	227
17.2.1. Densité . . . . .	227
17.2.2. Connexité . . . . .	228
17.2.3. Compacité . . . . .	229
17.3. Étude de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ . . . . .	229
<b>VI ALGÈBRE BILINÉAIRE</b>	<b>231</b>
<b>18. Formes sesquilinéaires</b>	<b>233</b>
18.1. Généralités . . . . .	233
18.1.1. Définitions . . . . .	233
18.1.2. Représentation matricielle en dimension finie . . . . .	235
18.2. Orthogonalité . . . . .	236
18.3. Isométries et similitudes . . . . .	238
18.3.1. Isométries . . . . .	238
18.3.2. Similitudes . . . . .	239
18.4. Classification des formes sesquilinéaires . . . . .	239
18.4.1. Classification des formes quadratiques en dimension finie . . . . .	240
18.4.2. Classification des formes quadratiques hermitiennes en dimension finie . . . . .	241
<b>19. Endomorphismes remarquables dans les espaces hilbertiens</b>	<b>243</b>
19.1. Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	243
19.2. Endomorphismes normaux . . . . .	243
19.2.1. Cas euclidien . . . . .	244
19.2.2. Cas hermitien . . . . .	245
19.3. Endomorphismes auto-adjoints . . . . .	245
19.3.1. Cas euclidien : endomorphismes symétriques . . . . .	246

19.3.2. Cas hermitien : endomorphismes hermitiens . . . . .	246
19.4. Automorphismes orthogonaux et automorphismes unitaires . . . . .	246
19.5. Visualisation synthétique : action par conjugaison . . . . .	248
<b>20. Les groupes orthogonaux et groupes unitaires</b>	<b>249</b>
20.1. Groupe orthogonal . . . . .	249
20.2. Groupe unitaire . . . . .	251
20.3. Étude topologique du groupe orthogonal et du groupe unitaire . . . . .	251
20.3.1. Décomposition polaire . . . . .	251
20.3.2. Groupe orthogonal (resp. unitaire) associé à une f.q. (resp. f.q.h) définie positive . . . . .	252
20.3.3. Groupe orthogonal (resp. unitaire) associé à une f.q. (resp. f.q.h) non-dégénérée . . . . .	253
<b>VII THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS</b>	<b>255</b>
<b>21. Représentations linéaires de groupes</b>	<b>257</b>
21.1. Généralités . . . . .	257
21.2. Représentations linéaires des groupes finis . . . . .	258
21.2.1. Table de caractères . . . . .	258
21.2.2. Décomposition en composantes isotypiques . . . . .	259
21.2.3. Exemples . . . . .	260
<b>VIII ANALYSE FONCTIONNELLE : PREMIÈRE PARTIE</b>	<b>263</b>
<b>22. Espaces topologiques fonctionnels élémentaires</b>	<b>265</b>
22.1. Les espaces $Y^X$ . . . . .	265
22.1.1. Quelques topologies et modes de convergence . . . . .	265
22.1.2. Théorèmes de Dini . . . . .	268
22.1.3. Interversions des limites . . . . .	269
22.1.4. Parties équicontinues de $Y^X$ . . . . .	269
22.2. Les espaces $\mathcal{C}(X, Y)$ . . . . .	270
22.2.1. Cas où $X$ est compact . . . . .	270
22.2.2. Cas où $X$ est localement compact dénombrable à l'infini . . . . .	273
22.2.3. Cas où $Y$ est un e.v.n. . . . .	273
<b>23. Intégrale de Lebesgue</b>	<b>275</b>
23.1. Tribus et mesures . . . . .	275
23.1.1. Tribus . . . . .	275
23.1.2. Mesures . . . . .	277
23.1.3. Complétion d'une tribu pour une mesure . . . . .	279
23.1.4. Tribu produit et mesure produit . . . . .	279
23.2. Intégration . . . . .	280
23.2.1. Intégrale de Lebesgue des fonctions positives . . . . .	280
23.2.2. Intégrale de Lebesgue pour des fonctions à valeurs complexes . . . . .	282

23.2.3. Intégrale de Lebesgue pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach réel séparable . . . . .	282
23.2.4. Intégrale de Lebesgue pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach réel quelconque . . . . .	283
23.3. Théorèmes fondamentaux de la théorie de la mesure . . . . .	283
23.3.1. Théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym . . . . .	283
23.4. Théorèmes outils . . . . .	286
23.4.1. Théorèmes d'interversion limite-intégrale . . . . .	286
23.4.2. Théorème de Fubini . . . . .	287
23.4.3. Continuité et dérivabilité sous le signe intégral . . . . .	288
<b>24. Séries de fonctions</b>	<b>289</b>
24.1. Convergence normale . . . . .	289
24.2. Critères simples de convergence uniforme . . . . .	290
24.3. Théorèmes d'interversion somme-intégrale . . . . .	291
<b>25. Les espaces <math>L^p</math></b>	<b>293</b>
25.1. Préliminaires . . . . .	293
25.2. Définitions . . . . .	294
25.3. Relations entre les espaces $L^p$ . . . . .	296
25.4. Séparabilité, réflexivité et dualité . . . . .	299
25.4.1. Réflexivité . . . . .	300
25.4.2. Dualité . . . . .	300
25.5. Approximation par des fonctions continues . . . . .	301
<b>26. Régularisation et approximation par convolution dans <math>L^p(\mathbb{R}^n)</math></b>	<b>303</b>
26.1. L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact . . . . .	303
26.2. Convolution sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	305
26.2.1. Convolution de fonctions positives . . . . .	305
26.2.2. Convolution dans les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	306
26.2.3. Convolution et dérivation . . . . .	307
26.3. Approximations de l'identité et suites régularisantes . . . . .	308
26.3.1. Approximations de l'identité . . . . .	308
26.3.2. Suites régularisantes . . . . .	310
26.3.3. Approximation dans un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	311
<b>27. Espaces de distributions</b>	<b>313</b>
27.1. L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions dans $\Omega$ . . . . .	313
27.1.1. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions-test . . . . .	313
27.1.2. Définition . . . . .	313
27.1.3. Convergence des distributions . . . . .	314
27.1.4. Dérivation des distributions . . . . .	315
27.2. L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	316
27.2.1. Espace de Schwartz . . . . .	316
27.2.2. Espace des distributions tempérées . . . . .	317
27.3. L'espace des distributions à support compact $\mathcal{E}'(\Omega)$ . . . . .	317
27.4. Convolution . . . . .	318
27.4.1. Préliminaires . . . . .	318
27.4.2. Convolution . . . . .	319

<b>28. Les espaces de Sobolev</b>	<b>321</b>
28.1. Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$	321
28.1.1. Prolongements	323
28.1.2. Opérateur trace	324
28.1.3. Espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$	325
28.2. Les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$	326
28.2.1. Cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$	326
28.2.2. Un résultat de compacité	327
28.2.3. Un théorème de régularité	328
28.2.4. Cas de la dimension 1	328
 <b>IX ANALYSE COMPLEXE</b>	 <b>329</b>
<b>29. Séries entières</b>	<b>331</b>
29.1. Intégration et dérivation des séries entières	331
29.2. Théorème radial d'Abel et théorème taubérien fort	333
29.2.1. Théorème radial d'Abel	333
29.2.2. Réciproque partielle du théorème radial d'Abel	334
 <b>30. Fonctions holomorphes</b>	 <b>335</b>
30.1. Généralités	335
30.2. Équivalence des notions d'holomorphic et de $\mathbb{C}$ -analyticité	336
30.2.1. Toute fonction $\mathbb{C}$ -analytique est holomorphic	336
30.2.2. Intégration sur des chemins	337
30.2.3. Toute fonction holomorphic est $\mathbb{C}$ -analytique	337
30.3. Propriétés des fonctions holomorphes	339
30.3.1. Premières propriétés	339
30.3.2. Formules de Cauchy	342
30.4. Structure topologique de $\mathcal{H}(\Omega)$	344
30.4.1. Complétude	344
30.4.2. Parties compactes	345
30.5. Fonctions méromorphes	346
30.5.1. Définition	346
30.5.2. Théorème des résidus	346
30.5.3. Applications au calcul d'intégrales définies réelles	347
30.6. Séries de fonctions méromorphes	349
30.7. Produits infinis de fonctions méromorphes	351
30.7.1. Rappels sur les produits infinis numériques	351
30.7.2. Produits infinis de fonctions	353
30.7.3. Produits infinis de fonctions méromorphes	353
 <b>X ANALYSE HARMONIQUE</b>	 <b>355</b>
<b>31. Séries de Fourier</b>	<b>357</b>
31.1. Généralités	357
31.1.1. Définition et propriétés élémentaires	357

31.1.2. Problématique . . . . .	359
31.2. Critères généraux de convergence d'une série de Fourier . . . . .	360
31.2.1. Convergence en moyenne de Cesàro . . . . .	360
31.2.2. Critères de convergence des sommes partielles d'une série de Fourier . . . . .	360
31.3. Séries de Fourier dans $L^2_{2\pi}$ . . . . .	363
31.4. Mesurer la régularité d'une fonction grâce à ses coefficients de Fourier . . . . .	364
31.5. Applications . . . . .	364
31.5.1. Calcul de $\zeta(2)$ . . . . .	364
<b>32. Analyse de Fourier</b>	<b>365</b>
32.1. Transformation de Fourier des fonctions $L^1$ . . . . .	365
32.2. Espaces stables par transformation de Fourier . . . . .	368
32.2.1. Transformation de Fourier dans l'espace des fonctions $\mathcal{S}$ . . . . .	368
32.2.2. Transformation de Fourier dans l'espace des distributions tempérées . . . . .	368
32.2.3. Transformation de Fourier dans $L^2$ . . . . .	369
32.3. Transformation de Fourier dans l'espace des distributions à support compact . . . . .	369
32.4. Propriétés . . . . .	369
<b>XI ANALYSE FONCTIONNELLE : DEUXIÈME PARTIE</b>	<b>371</b>
<b>33. Calcul différentiel</b>	<b>373</b>
33.1. Calcul différentiel à une variable réelle . . . . .	373
33.1.1. Chemins différentiables . . . . .	373
33.1.2. Chemins différentiables à valeurs dans $\mathbb{R}$ , ou fonctions dérivables . . . . .	375
33.2. Applications différentiables . . . . .	376
33.2.1. Généralités . . . . .	376
33.2.2. Cas des applications différentiables à valeurs réelles . . . . .	378
33.2.3. Dérivées d'ordre supérieur . . . . .	378
33.2.4. Formules de Taylor . . . . .	380
33.2.5. Applications analytiques . . . . .	382
33.2.6. Convergence dans les espaces $\mathcal{C}^p$ . . . . .	383
33.3. Difféomorphismes et théorèmes d'inversion . . . . .	384
33.3.1. Théorème d'inversion locale . . . . .	384
33.3.2. Théorème des fonctions implicites . . . . .	385
33.3.3. Théorème de changement de variables . . . . .	386
33.4. Les 1-formes différentielles . . . . .	386
33.4.1. Généralités . . . . .	386
33.4.2. Intégrale d'une 1-forme différentielle fermée le long d'un arc . . . . .	387
<b>34. Équations différentielles ordinaires</b>	<b>389</b>
34.1. Généralités . . . . .	389
34.1.1. Équations différentielles ordinaires du premier ordre . . . . .	389
34.1.2. Équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur à 1 . . . . .	390
34.2. Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz . . . . .	390
34.3. Théorème d'existence de Cauchy-Peano-Arzelà . . . . .	392
34.4. Systèmes différentiels linéaires . . . . .	393
34.4.1. Cas général . . . . .	393
34.4.2. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants . . . . .	394
34.4.3. Systèmes différentiels linéaires à coefficients variables . . . . .	396

<b>35. Équations aux dérivées partielles</b>	<b>399</b>
35.1. Problèmes elliptiques linéaires . . . . .	399
35.1.1. Problème du Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet homogène	399
35.1.2. Problème elliptique du 2 <sup>e</sup> ordre avec condition aux limites de Dirichlet homogène . . . . .	400
35.2. Problèmes d'évolution . . . . .	402
35.2.1. Prototype de problème d'évolution parabolique : l'équation de la chaleur	402
35.2.2. Prototype de problème d'évolution hyperbolique : l'équation des ondes	403
 <b>XII MÉTHODES NUMÉRIQUES</b>	 <b>405</b>
<b>36. Calcul matriciel</b>	<b>407</b>
36.1. Méthode du pivot de Gauss . . . . .	407
36.2. Factorisations classiques de matrices . . . . .	407
36.2.1. Décomposition polaire . . . . .	407
36.2.2. Factorisation $LU$ . . . . .	408
36.2.3. Factorisation de Cholesky . . . . .	408
36.2.4. Factorisation $QR$ . . . . .	408
 <b>XIIIDÉVELOPPEMENTS D'ALGÈBRE</b>	 <b>409</b>
<b>37. Structures algébriques élémentaires</b>	<b>411</b>
37.1. Théorèmes de Sylow (méthode de Serre) . . . . .	411
37.2. Simplicité de $\mathcal{A}_n$ . . . . .	413
37.3. Les automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	414
37.4. Lemme d'Iwasawa . . . . .	417
37.4.1. Un critère de reconnaissance d'un groupe simple : le lemme d'Iwasawa	417
37.4.2. Groupe opérant primitivement sur un ensemble . . . . .	418
37.4.3. Un exemple d'opération primitive . . . . .	419
37.5. Un anneau principal non-euclidien (exemple de Motzkin) . . . . .	420
37.6. Le théorème des deux carrés via l'anneau des entiers de Gauss . . . . .	422
37.7. Théorème de Wedderburn (méthode de Witt) . . . . .	424
 <b>38. Algèbre générale</b>	 <b>427</b>
38.1. La loi de réciprocité quadratique via le résultant . . . . .	427
38.2. Théorème de Chevalley-Warming . . . . .	429
38.3. Théorème de Kronecker . . . . .	431
 <b>39. Algèbre linéaire</b>	 <b>433</b>
39.1. Invariants de similitude . . . . .	433
39.2. Théorème de Perron-Frobenius . . . . .	436
39.2.1. Énoncé et démonstration . . . . .	436
39.2.2. Matrices positives, graphes et chemins . . . . .	437
39.3. Lemme de Schur . . . . .	439

<b>XIV DÉVELOPPEMENTS D'ANALYSE</b>	<b>441</b>
<b>40. Topologie</b>	<b>443</b>
40.1. Lemme d'Urysohn et théorème de partition de l'unité . . . . .	443
40.2. Théorème de Baire et applications . . . . .	445
40.3. Théorème de Hahn-Banach . . . . .	450
40.3.1. Versions analytiques du théorème de Hahn-Banach . . . . .	450
40.3.2. Versions géométriques du théorème de Hahn-Banach . . . . .	452
40.4. Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder . . . . .	453
40.5. Théorème de John-Loewner . . . . .	458
40.6. Simplicité de $SO_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$ impair . . . . .	460
40.7. Images de $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$ par l'exponentielle matricielle . . . . .	463
<b>41. Espaces fonctionnels</b>	<b>467</b>
41.1. Théorème de Banach-Steinhaus et applications . . . . .	467
41.2. Théorème d'approximation de Weierstrass par les polynômes de Bernstein . . . . .	469
41.3. Théorème de Riesz-Fischer . . . . .	472
41.4. Réflexivité et dualité de $L^p(\mu)$ . . . . .	474
41.5. Théorème d'Ascoli . . . . .	477
41.6. Construction de bases hilbertiennes de $L^2(I)$ . . . . .	479
<b>42. Analyse harmonique</b>	<b>483</b>
42.1. Théorème de Fejér . . . . .	483
<b>43. Analyse fonctionnelle</b>	<b>487</b>
43.1. Lemme de Morse . . . . .	487
43.2. Théorème d'inversion locale via les isomorphismes de Lipschitz . . . . .	489
43.2.1. Cas des isomorphismes de Lipschitz . . . . .	489
43.2.2. Cas général . . . . .	492
<b>44. Analyse à une variable complexe</b>	<b>493</b>
44.1. Théorème de Hardy-Littlewood (méthode de Karamata) . . . . .	493
44.1.1. Théorème de Hardy-Littlewood . . . . .	493
44.1.2. Théorème taubérien . . . . .	495
44.2. Prolongement de la fonction Gamma d'Euler . . . . .	497
44.3. Prolongement de la fonction zeta de Riemann . . . . .	500
44.4. Théorème de répartition des nombres premiers . . . . .	503
<b>Bibliographie</b>	<b>509</b>
<b>Index</b>	<b>511</b>