

1. Mesure du volume d'une cuillère à soupe

En cuisine, l'utilisation d'outils simples de mesure est fréquente (cuillère à café, à soupe, verre doseur). Cependant quel est le volume de liquide qu'on peut prélever à l'aide d'une cuillère à soupe par exemple ?

Série de mesures

Afin de déterminer le volume d'une cuillère à soupe, on réalise dix fois la manipulation suivante :

- Remplir d'eau une cuillère à soupe.
- Verser cette eau dans une éprouvette graduée de 20 mL placée sur une balance à 0,1 g (la tare ayant été effectuée).
- Relever le volume V et la masse m d'eau (qui est proportionnelle au volume).

On obtient alors le tableau de mesures suivant :

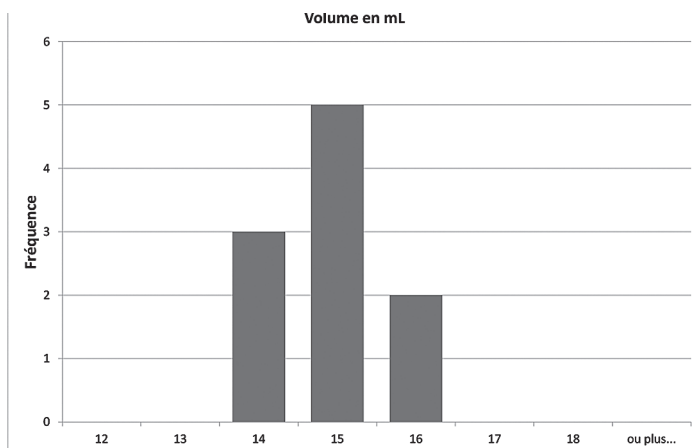
| | | | | | | | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Volume en mL | 15 | 14 | 15 | 15 | 14 | 16 | 15 | 14 | 16 | 15 |
| Masse en g | 15,1 | 14,4 | 15,3 | 14,8 | 13,7 | 15,9 | 15,4 | 14,2 | 16,1 | 14,8 |

Dispersion des mesures

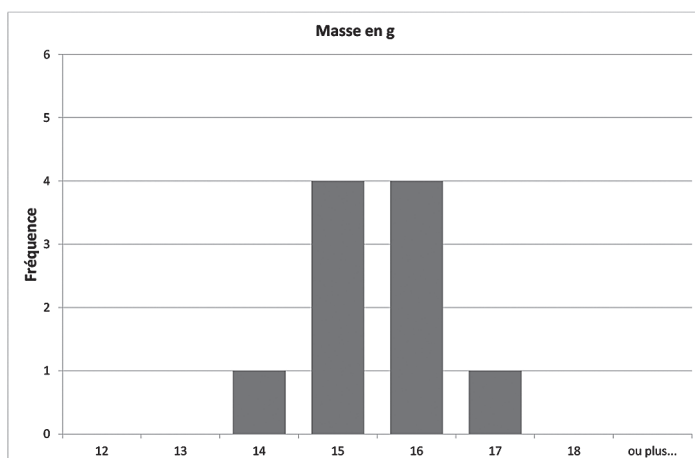
Histogramme des données

La représentation des données (ici sous la forme de classe d'une unité de largeur) permet de mettre en évidence la dispersion des données. Il est donc impossible de considérer comme absolue une seule mesure. La dispersion des valeurs peut dépendre de nombreux facteurs, mais les principaux sont :

- Le manipulateur.
- La méthode de mesure.
- L'appareil de mesures.



Histogramme des mesures de volume.



Histogramme des mesures de masse.

Estimation de la dispersion

Il est possible d'écrire les résultats de mesures (ou mesurandes) sous la forme d'un encadrement, on a ainsi les écritures suivantes (pour une analyse à l'unité près) :

- Volume V en mL : $V \in [14 ; 16]$
- Masse m en g : $m \in [14 ; 17]$

2. Incertitude-type

Définition

L'incertitude-type $u(x)$ d'une grandeur x définit une plage de valeurs possibles, celle-ci s'écrit $[x - u(x) ; x + u(x)]$.

Une mesure expérimentale possède une probabilité de $2/3$ d'être dans cette plage.

Approche statistique ou probabiliste des données

Selon la méthode utilisée, la mesure d'une grandeur peut prendre deux aspects :

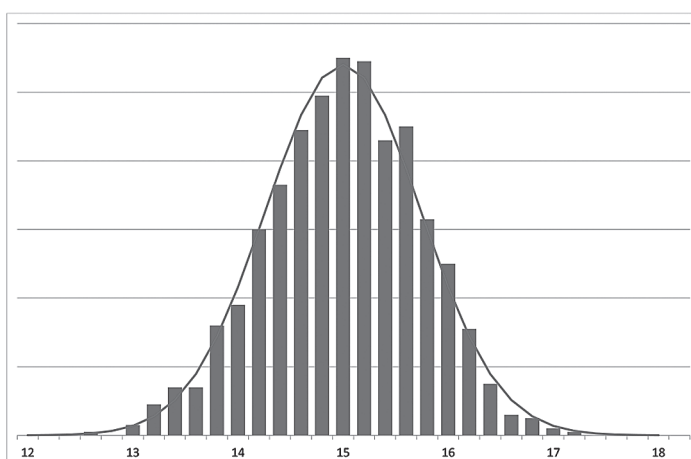
- Une approche statistique qui correspond à une analyse des données obtenues lors de la répétition d'une même mesure par la même méthode et avec le même matériel. On parle alors d'incertitude de type A.
- Une approche probabiliste qui consiste à estimer la dispersion à partir des caractéristiques de la mesure effectuée. On parle alors d'incertitude de type B.

Exemple de dispersion de type A

Si on simule la détermination du volume d'une cuillère à soupe sur une série de mille mesures indépendantes, on peut voir émerger une tendance.

La courbe de Gauss semble suivre la distribution des mesures. Cette courbe est basée sur deux grandeurs statistiques :

- La moyenne \bar{x} qui correspond au maximum de la courbe.
- L'écart-type noté σ qui correspond à l'élargissement de cette courbe et qui est donc l'incertitude-type de cette série. On a donc $u(x) = \sigma$.



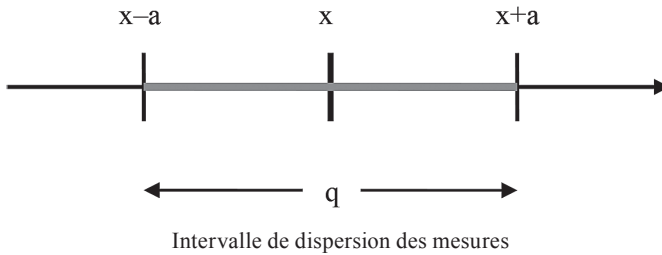
Distribution d'une série de 1 000 mesures et courbe de Gauss

Analyse des deux séries de mesures initiales

| Grandeur mesurée | Mesurande | Incertitude-type (ou écart-type) |
|------------------|-----------|-------------------------------------|
| Volume en mL | 14,9 | 0,738 |
| Masse en g | 15,0 | 0,748 |

Exemple de dispersion de type B

L'utilisation d'appareil de mesure implique une source d'incertitude. Généralement on connaît la précision a de l'appareil, on a alors $u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$.



Si on dispose de l'étendue $q = 2a$, l'incertitude type s'écrit $u(x) = \frac{q}{2\sqrt{3}}$.

Incertitude-type composée

Parfois, la détermination d'une grandeur dépend de plusieurs mesures. Or chaque mesure est associée à une incertitude-type.

Il est possible de tenir compte de ces différentes incertitudes-type en utilisant une formule de propagation qui sera fournie.

Par exemple, le calcul de la masse volumique ρ de l'eau, à partir des mesures effectuées précédemment, s'effectue en deux étapes :

- Calcul de la valeur de la masse volumique : $\rho = \frac{m}{V}$.
- Détermination de l'incertitude-type composée par la relation :

$$u(\rho) = \rho \times \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(V)}{V}\right)^2}.$$

Incertitude élargie

Par définition, l'incertitude-type correspond à une probabilité de $2/3$. Cependant il est parfois préférable d'augmenter cette probabilité, on parle alors d'incertitude élargie qu'on $U(x)$ au lieu de $u(x)$.

On utilise la relation $U(x) = k \times u(x)$, où k est appelé facteur d'élargissement dont la valeur dépend de la méthode de mesure. Si aucune information n'est disponible sur ce facteur d'élargissement, on prend $k = 2$.

3. Présenter et analyser un résultat de mesure

Écrire un résultat de mesure

Format de représentation

Un résultat correspondant à la détermination d'une grandeur G s'écrit sous la forme :

$$G = (\text{mesurande} \pm \text{incertitude}) \text{ unité}$$

Règles d'écriture

Une incertitude-type ne doit posséder qu'un seul chiffre significatif. À cause du format de représentation, le mesurande sera écrit avec le même nombre de décimales que l'incertitude (type ou élargie).

Pour la série concernant le volume, on a :

- En incertitude-type :
 - $u(V) = 0,738$, on retient $u(V) = 0,7$ mL en raison de l'arrondi.
 - V sera écrit à une décimale comme $u(V)$ soit $V = 14,9$ mL
 - Finalement, on aura : $V = (14,9 \pm 0,7)$ mL.
- En incertitude élargie :
 - $U(V) = k \times u(V)$, ici sur dix mesures, $k = 2,26$.
On a donc $U(V) = 2,26 \times 0,738 = 1,67$ mL, on retient $U(V) = 2$ mL.
 - V sera écrit à l'unité près soit $V = 15$ mL.
 - Finalement, on aura $V = (15 \pm 2)$ mL.

Analyser le résultat obtenu

Si la valeur de référence V_{Ref} est comprise dans l'intervalle défini par la valeur expérimentale et son incertitude, on peut dire que cette dernière est conforme à la valeur de référence.

Énoncés des exercices

* Exercice 1

🕒 10 min

L'étude d'un pendule simple consiste à mesurer la période d'oscillation d'une masse m suspendue à un fil de longueur $L = 2,05$ m.

La mesure de la période s'effectue à l'aide d'un chronomètre dont l'étendue q est de $1/10$ de seconde.

La mesure obtenue est de $T = 2,9$ s.

1. Quel est le type d'incertitude correspondant à la mesure de la période T ? Justifier.
2. Déterminer l'incertitude-type de cette mesure de période.
3. Écrire correctement la valeur de la période T en utilisant l'incertitude élargie.

La période théorique de ce pendule est définie par la relation $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, où g est l'intensité de pesanteur terrestre : $g = 9,81$ m·s⁻².

4. La valeur mesurée est-elle conforme à la valeur théorique ?

** Exercice 2

🕒 20 min

Lors d'une séance de TP, l'ensemble des 8 groupes d'une classe réalise le dosage d'un volume $V_{\text{essai}} = (10,00 \pm 0,02)$ mL de vinaigre dilué. Pour cela, ils utilisent :

- une solution d'hydroxyde de sodium de concentration en quantité de matière $C_B = (1,25 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$ mol·L⁻¹.
- un matériel de même classe et en suivant rigoureusement le même protocole.

On relève les volumes équivalents obtenus de chaque groupe.

| Groupe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Volume équivalent V_E en mL | 10,4 | 10,3 | 10,4 | 10,6 | 10,4 | 10,5 | 10,3 | 10,4 |

En tenant compte d'un taux de confiance de 95 %, le facteur d'élargissement vaut $k = 2,37$.

La détermination de la concentration en quantité de matière en acide éthanoïque C_A du vinaigre dilué, en mol·L⁻¹, se détermine par la relation $C_A = C_B \times \frac{V_E}{V_{\text{essai}}}$.

L'incertitude composée sur la concentration en acide éthanoïque du vinaigre se détermine par la relation de propagation suivante :

$$U(C_A) = C_A \times \sqrt{\left(\frac{U(V_{\text{essai}})}{V_{\text{essai}}}\right)^2 + \left(\frac{U(V_E)}{V_E}\right)^2 + \left(\frac{U(C_B)}{C_B}\right)^2}.$$

1. Déterminer le volume à l'équivalence V_E ainsi que son incertitude élargie associée.
2. Calculer la concentration en quantité de matière C_A en acide éthanoïque du vinaigre dilué, on arrondira cette valeur à 3 chiffres significatifs.
3. Donner l'écriture finale de la concentration en quantité de matière C_A en acide éthanoïque du vinaigre dilué.

Corrigés exercices

Exercice 1

1. L'incertitude correspondant à la mesure de la période T est de type B car il n'y a qu'une seule mesure effectuée.
2. L'étendue de mesure du chronomètre vaut $q = 0,1$ s. On en tire l'incertitude-type

$$u(T) = \frac{q}{2\sqrt{3}} = \frac{0,1}{2\sqrt{3}} = 0,029 \approx 0,03 \text{ s.}$$
3. L'incertitude élargie vaut $U(T) = 2 \times u(T) = 2 \times 0,029 = 0,058 \approx 0,06$ s. La période s'écrit :

$$T = (2,90 \pm 0,06) \text{ s.}$$

4. La valeur théorique vaut $T_{\text{ref}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2,05}{9,81}} \approx 2,87$ s. La valeur de

référence est bien incluse dans l'intervalle défini par la mesure. La valeur mesurée est donc conforme à la valeur de référence.

Exercice 2

1. Le volume équivalent est obtenu à partir d'une série de mesures. On détermine la moyenne et l'écart-type de cette série :
 - Valeur moyenne : $\overline{V_E} = 10,41$ mL.
 - Écart-type : $u(V_E) = \sigma = 0,099$ mL.

On en déduit l'incertitude élargie :

$$U(V_E) = k \times u(V_E)$$

$$U(V_E) = 2,37 \times 0,099$$

$$U(V_E) = 0,235 \approx 0,2 \text{ mL}$$

Le volume équivalent retenu sera $V_E = (10,4 \pm 0,2) \text{ mL}$.

2. La concentration en quantité de matière C_A en acide éthanoïque du vinaigre dilué se calcule par :

$$C_A = C_B \times \frac{V_E}{V_{\text{essai}}}$$

$$C_A = 1,25 \cdot 10^{-2} \times \frac{10,4}{10,0}$$

$$C_A = 1,30 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

3. On calcule l'incertitude élargie par la relation fournie :

$$U(C_A) = C_A \times \sqrt{\left(\frac{U(V_{\text{essai}})}{V_{\text{essai}}}\right)^2 + \left(\frac{U(V_E)}{V_E}\right)^2 + \left(\frac{U(C_B)}{C_B}\right)^2}$$

$$U(C_A) = 1,30 \cdot 10^{-2} \times \sqrt{\left(\frac{0,02}{10,00}\right)^2 + \left(\frac{0,2}{10,4}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{1,25}\right)^2}$$

$$U(C_A) = 0,0578 \cdot 10^{-2} \approx 0,06 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La concentration en quantité de matière C_A s'écrit donc :

$$C_A = (1,30 \pm 0,06) \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$