Chapitre 1

Intégrales généralisées

≪ *Penser c'est oublier des différences, c'est généraliser, c'est abstraire.* ≫

Jorge Luis Borges (1899-1986)

Lorsque l'intervalle d'intégration n'est plus un segment ou lorsque la fonction à intégrer n'est pas définie aux bornes de l'intégrale, on parle d'intégrale généralisée (ou d'intégrale impropre). Même si les intégrales généralisées partagent un bon nombre de propriétés avec les intégrales définies, leur étude nécessite un traitement adapté.
Ce chapitre comporte des rappels de cours et un certain nombre d'exercices fondamentaux. Il s'agit essentiellement de distinguer les intégrales convergentes de celles qui divergent et de calculer des intégrales convergentes. On terminera par des applications en physique et en statistiques. Certains exercices font appel aux méthodes usuelles d'intégration (notamment l'intégration par parties, le changement de variable ou la décomposition en éléments simples) ; le lecteur qui n'est pas à l'aise avec ces techniques pourra consulter [12].

1.1 Rappels de cours

Soit f une fonction continue et définie, non par sur un segment $[a, b]$ mais sur un intervalle ouvert $]a, b[$, avec éventuellement $a = -\infty$ et $b = +\infty$. L'expression $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est alors appelée intégrale généralisée.

Le cas où f est définie sur $[a, b[$

Définition. *Si l'expression* $\int_a^x f(t)dt$ *a une limite finie* l *lorsque* x *tend vers* b*, on dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *existe ou qu'elle converge et sa valeur est* l*. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.*

Proposition. *Soit* α *un réel et soit* a *un réel strictement positif. L'intégrale* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *et donc diverge si et seulement si* $\alpha \leq 1$*.*

Démonstration

* Si $\alpha = 1$, alors

$$\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \int_a^x \frac{1}{t}dt = [\ln t]_a^x = \ln x - \ln a.$$

* Si $\alpha \neq 1$, alors

$$\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}dt = [\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}]_a^x = \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient le résultat escompté. □

Définition. *Les intégrales de la proposition précédente sont appelées intégrales de Riemann dont la borne problématique est la borne* $+\infty$*.*

Le cas où f est définie sur $]a, b]$

Définition. *Si l'expression* $\int_x^b f(t)dt$ *a une limite finie* l *lorsque* x *tend vers* a*, on dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ *existe ou qu'elle converge et sa valeur est* l*. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.*

Proposition. *Soit* α *un réel. L'intégrale* $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$ *et donc diverge si et seulement si* $\alpha \geq 1$*.*

Démonstration

* Si $\alpha = 1$, alors
$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^1 = -\ln x.$$

* Si $\alpha \neq 1$, alors
$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = [\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}.$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient le résultat escompté. $\square$

Définition. *Les intégrales de la proposition précédente sont appelées intégrales de Riemann dont la borne problématique est la borne 0.*

Remarquons, s'il en est besoin, que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{t^\alpha} dt$, avec b réel strictement positif, sont de même nature. Ce que l'on peut facilement démontrer par simple utilisation de la relation de Chasles.

Le cas où f est définie sur $]a, b[$

Définition. *On dit que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *existe ou converge s'il existe c dans* $]a, b[$ *tel que les intégrales* $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ *sont toutes les deux convergentes. Dans ce cas, on pose* $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

Remarque. Il faut prendre garde au fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} 2tdt$ est divergente bien que pour tout réel x, on ait $\int_{-x}^{x} 2tdt = 0$ et donc que $\lim_{x \mapsto +\infty} \int_{-x}^{x} 2tdt = 0$. Il faut donc bien considérer les deux bornes indépendamment l'une de l'autre.

Critères de convergence et propriétés

Théorème. *(Théorème de comparaison) Soient* f *et* g *deux fonctions continues, positives sur* $[a, b[$ *et telles que* $0 \leq f(t) \leq g(t)$ *pour tout* t *dans* $[a, b[$. *On a :*

* *si* $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge*

* *si* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge, alors* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge.*

Proposition. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$.*

* *Si* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *convergent, alors pour tout λ et tout μ dans $\mathbb{R}$, l'intégrale*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt$$

converge également.

* *Si* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *convergent et si, pour tout t dans $[a,b[$, on a $f(t) \leq g(t)$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Définition. *On dit que* $\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente lorsque* $\int_a^b |f(t)|dt$ *converge.*

Théorème. *Si* $\int_a^b f(t)$ *est absolument convergente, alors elle converge. Et dans ce cas, on a*

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Démonstration

Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ soit absolument convergente et posons $f^+ = \dfrac{f+|f|}{2}$ et $f^- = \dfrac{f-|f|}{2}$. On constate que $0 \leq f^+(t) \leq |f(t)|$ et $0 \leq f^-(t) \leq |f(t)|$ pour tout t dans $[a,b]$. D'après le théorème de comparaison, on en déduit que $\int_a^b f^+(t)dt$ et $\int_a^b f^-(t)dt$ convergent. Ainsi, par linéarité, $f = f^+ - f^-$ converge. D'autre part, on a pour tout t dans $[a,b]$,

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|,$$

ce qui implique, d'après les propriétés des intégrales, que

$$-\int_a^b |f(t)|dt \leq \int_a^b f(t) \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Ceci achève la preuve. $\square$

Avec des équivalents

Définition. *On dit que deux fonctions f et g sont équivalentes en b (où b peut être l'infini) lorsqu'il existe une fonction h définie sur un intervalle $[a, b[$ avec $a < b$ telle que $f = hg$ et $\lim_{t \mapsto b^-} h(t)dt = 1$. Dans ce cas, on note*

$$f \underset{b}{\sim} g.$$

On a la proposition suivante

Proposition. *Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle de la forme $[a, b[$ (avec b éventuellement égal à l'infini) et à valeurs positives. Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*

Avec des complexes

Si f est une fonction à valeurs complexes, on désigne par $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ les fonctions partie réelle et partie complexe associées que l'on suppose définies et continues sur $]a, b[$ avec a et b valant éventuellement $\pm\infty$ c'est-à-dire que, pour tout t dans $]a, b[$, on a

$$f(t) = x(t) + iy(t).$$

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b x(t)dt$ et $\int_a^b y(t)dt$ convergent.

Définition. *Soit f une fonction à valeurs complexes. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument (ou est absolument convergente) lorsque l'intégrale des modules $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.*

Proposition. *Soit $f : t \mapsto x(t) + iy(t)$ une fonction à valeurs complexes.*

* *L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si et seulement si $\int_a^b x(t)dt$ et $\int_a^b y(t)dt$ sont absolument convergentes.*
* *Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle converge a* fortiori.

Remarque. Une intégrale peut être convergente, sans être convergente absolument. On dit alors qu'elle est semi-convergente. Par exemple, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$ est semi-convergente (on le montrera en exercice).

1.2 Mise en route

Exercice 1. $\diamond$
Déterminer si les intégrales suivantes convergent et dans l'affirmative, calculer leur valeur.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

2) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^2}$

3) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}$

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}}$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt$

6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$

7) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{tdt}{(1+t^2)^3}.$

Exercice 2. $\diamond\diamond$
Déterminer si les intégrales suivantes convergent.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2}dt$

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \ln(t)dt$

4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}dt.$

1.3 Intégrales plus sophistiquées

Exercice 3. $\diamond\diamond$

1) En faisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

converge.

2) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt$ *est-elle convergente absolument, semi-convergente ou divergente ?*

Exercice 4. $\diamond\diamond$
Calculer les intégrales généralisées suivantes si elles convergent.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t+1)}$

2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t+1)}$

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(t^2+1)}dt.$

Exercice 5. $\diamond\diamond$
Pour tout entier $n \geq 0$*, on définit*

$$u_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

1) Calculer u_0*.*

2) Trouver une relation entre u_n *et* u_{n-1} *pour tout entier naturel* $n \geq 1$*.*

3) En déduire une expression de u_n *en fonction de* n*.*

1.4 Divers produits de convolution

Exercice 6. $\diamond\diamond\diamond$
Par définition, le produit de convolution de deux fonctions f *et* g*, continues sur* $\mathbb{R}$*, est la fonction, notée* $f * g$ *et définie par*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Déterminer $f * g$ *dans les cas suivants :*

1) f *et* g *sont égales à la fonction échelon unité (ou de Heaviside) notée* $\mathcal{U}$ *et définie par*

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

2) f *et* g *sont égales à la fonction porte notée* Π *et définie par*

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & si\ |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Notons que les fonctions $\mathcal{U}$ et Π sont très utilisées en physique. On les retrouvera dans les chapitres ultérieurs.

1.5 En lien avec les statistiques

Exercice 7. $\diamond\diamond\diamond$

1) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

2) Montrer que pour tout réel τ strictement positif et tout réel m, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{\tau^2}}dt = \tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

3) En admettant que $\int_{\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, montrer que pour tout réel m et tout réel σ strictement positif,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt = 1.$$

Notons que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$ est très connue en statistiques puisqu'il s'agit de la densité de la loi normale. On en reparlera dans la deuxième partie de cet ouvrage.

1.6 Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1) Il s'agit, d'après le cours, d'une intégrale de Riemann convergente. De plus, pour tout $x > 0$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on prouve que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1.$$

2) D'après le cours, il s'agit d'une intégrale de Riemann divergente (avec $\alpha = 2$ et avec 0 comme borne problématique).