

Chapitre 1

Compléments d'analyse

1.1 Grand O , petit o : des amis fidèles

Nous commençons ce livre par plusieurs rappels sur des notions relatives à la comparaison des grandeurs que le lecteur a sans doute déjà rencontrées. Mais notre expérience d'enseignants nous a appris que comme toutes les notions et notations puissantes, elles demandent un certain temps pour être appréhendées. Et que celui pour lequel elles ne restent qu'un vague bruit de fond finit par être bien malheureux.

1.1.1 La notation grand O

La notation O est utilisée pour majorer l'ordre de grandeur d'une quantité. Si S est un ensemble quelconque, f et g des fonctions définies sur S réelles (ou complexes ou vectorielles), on dira que

$$f(x) = O(g(x)) \quad x \in S \quad (1.1)$$

s'il existe un réel $A > 0$ tel que $\forall x \in S, |f(x)| \leq A|g(x)|$. Ainsi, cette notation exprime qu'il n'y a pas nécessité, pour les calculs qui sont à effectuer, de garder trace de la valeur précise de A : seule son existence compte. Ce premier usage de la notation O n'est pas si fréquent dans la littérature : nous l'empruntons à De Bruijn [9] car il nous semble très éclairant pour appréhender le second usage de la notation O , beaucoup plus courant.

Si S est une partie de \mathbb{R} telle que $\sup_{x \in S} x = +\infty$, on dit que

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty \quad (1.2)$$

s'il existe un réel a tel que

$$f(x) = O(g(x)) \quad \forall x \in S \cap]a, +\infty[. \quad (1.3)$$

Autrement dit, l'assertion (1.2) est équivalente à

$$\exists(a, A) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in S, \quad x > a \implies |f(x)| \leq A|g(x)|.$$

Moralement, les conditions (1.1) et (1.2) sont “presque équivalentes”. Évidemment (1.1) entraîne (1.2), mais quand on a (1.2), on n'est pas très loin d'avoir (1.1). En particulier, elles sont équivalentes si $S = \mathbb{N}$ et si g ne s'annule pas sur \mathbb{N} , ou si $S = [0, +\infty[$, f et g sont continues sur S et si g ne s'annule pas sur S . En effet, dans le premier cas $\frac{f}{g}$ est bornée sur l'ensemble fini $\mathbb{N} \cap [0, a]$, et dans le second cas $\frac{f}{g}$ est continue sur le compact $[0, a]$, donc est bornée sur ce compact.

Si f et g sont définies sur $S =]0, c]$ (respectivement $S =]-c, c[\setminus \{0\}$), on dit également que

$$f(x) = O(g(x)) \quad x \rightarrow 0 \tag{1.4}$$

s'il existe un réel a tel que

$$f(x) = O(g(x)) \quad x \in S \cap]0, a[\quad (\text{respectivement } x \in S \cap]-a, a[). \tag{1.5}$$

On remarque que si on a $f = O(g)$ au voisinage d'un point ou de l'infini, et si g est de limite nulle en ce point, alors f est aussi de limite nulle.

1.1.2 La notation petit o

La notation o exprime une relation de négligeabilité : on dit que

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{lorsque } x \rightarrow +\infty \tag{1.6}$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel a tel que

$$\forall x \in S \cap]a, +\infty[, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|. \tag{1.7}$$

La notation o est plus connue que la notation O . Paradoxalement, elle est aussi moins efficace pour la raison suivante : o et O sont souvent utilisés dans les développements limités en l'origine de fonctions classiques. Les fonctions classiques étant de classe C^∞ , on obtient plus (ou autant) d'information avec autant de termes non-nuls dans le développement pour les O que pour les o .

Exemple : Comparer, en 0, $\sin x = x + o(x^2)$ avec $\sin x = x + O(x^3)$. Supposons

que l'on veuille montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^{2.5}} = 0$. De la première écriture, on tire

$x - \sin x = o(x^2)$, d'où $\frac{x - \sin x}{x^{2.5}} = o(1/\sqrt{x})$, ce qui ne permet pas de conclure : il

est sans intérêt ici d'être négligeable devant une quantité de limite infinie. En revanche de la deuxième écriture, on tire $x - \sin x = O(x^3)$, d'où l'on déduit

que $\frac{x - \sin x}{x^{2.5}} = O(\sqrt{x})$, ce qui permet de conclure puisque x a évidemment une

limite nulle en 0. Pour obtenir le même résultat avec des petits o , il faut aller un cran plus loin : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

1.1.3 Équivalence de deux fonctions, de deux suites

On dit que les fonctions (ou les suites) f et g sont équivalentes en truc (truc étant un point ou l'infini) si $f(x) - g(x) = o(f(x))$ quand x tend vers truc. On écrit alors $f(x) \underset{x \rightarrow \text{truc}}{\sim} g(x)$. Il n'est pas très difficile de démontrer que cette relation est bien une relation d'équivalence.

Cependant, l'usage direct de la définition est rarement le bon moyen de travailler avec les équivalents. Il est souvent plus utile de remarquer que si f et g ne s'annulent pas, f et g sont équivalents en truc si et seulement si $f(x)/g(x) \rightarrow 1$ quand x tend vers truc.

On remarque que grand O, petit o, et équivalents sont tous trois des affaires de quotient : quotient qui reste borné, qui tend vers 0, ou qui tend vers 1, ce qui explique que ces trois relations se comportent très bien avec le produit.

Exemple : Étude de la suite $u_{n+1} = \sin u_n$, avec $u_0 \in]0, 1]$.

Comme $0 < \sin x < x$ pour $x \in]0, 1]$, la suite est à valeurs dans $]0, 1]$ et décroissante, minorée, donc convergente. La limite est 0 car la limite est un point fixe de la fonction continue $x \mapsto \sin x$ sur $[0, 1]$, et 0 est bien la seule solution.

Étudions $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = g(u_n)$, avec $g(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{\sin^2 x} - 1 \right)$.

Au voisinage de 0, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$, donc $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)$, d'où $\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + O(x^4)$, puis $\frac{x^2}{\sin^2 x} = 1 + \frac{x^2}{3} + O(x^4)$, soit $g(x) = \frac{1}{3} + O(x^2)$. Comme (u_n) est de limite nulle, $g(u_n)$ tend vers $1/3$, donc par le théorème de Cesàro

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(u_k)$$

tend vers $1/3$ quand n tend vers l'infini. Ainsi, $\frac{1}{nu_n^2} \sim \frac{1}{3}$ soit $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. L'usage du O permet de préciser l'équivalent, sans qu'il soit nécessaire de pousser plus loin le développement en série du sinus. En réinjectant dans la formule asymptotique l'équivalent trouvé, on a $g(u_k) = \frac{1}{3} + O(u_k^2) = \frac{1}{3} + O(1/k)$, d'où

$$\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3} + O(1/k) \right) = \frac{n}{3} + O\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k} \right).$$

1. C'est le 2, indice du second coefficient non-nul dans le développement de $\frac{\sin x}{x}$, qui explique le choix "miraculeux" de la suite auxiliaire $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$. À titre d'exercice, le lecteur pourra étudier la récurrence $u_{n+1} = \log(1 + u_n)$.

Il est classique que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \log n$. On en déduit :

$$\frac{1}{u_n^2} = \frac{n}{3} + O(\log n) = \frac{n}{3} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right), \text{ puis } u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} \left(1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right).$$

1.2 Convergence de séries et d'intégrales

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. On lui associe la suite (S_n) définie par $S_0 := a_0$, $S_1 := a_0 + a_1$, $S_n := a_0 + \dots + a_n$.

Le terme S_n est la somme partielle d'ordre n de la série de terme général a_n . On dit que la série de terme général a_n converge si la suite (S_n) a une limite S . Dans ce cas, on définit le reste d'ordre n de la série par

$$R_n := S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Proposition 1.1. Soit a_n le terme général d'une série convergente. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \text{ (et } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0).$$

Remarque 1.2. La réciproque est fautive. En effet, si on considère par exemple $a_n := 1/n$ pour $n \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et pourtant $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \infty$.

Exemple : La série géométrique. Soit $q \in \mathbb{C}; q \neq 1$. Si l'on considère la série de terme général $a_n = q^n$, on a $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Si $|q| < 1$, alors S_n tend vers $\frac{1}{1-q}$ lorsque n tend vers l'infini, et la série converge. Sinon le terme général ne tend pas vers 0 (car $|q|^n \geq 1$) et donc la série diverge.

1.2.1 Séries à termes positifs

Définition. La série de terme général a_n est une série à termes positifs si pour tout $n \geq 0$, on a $a_n \geq 0$.

Proposition 1.3. Si la série de terme général a_n est une série à termes positifs, alors elle converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Démonstration. Une suite croissante majorée converge ; une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. \square

Théorème 1.4 (de comparaison). Soient a_n et b_n les termes généraux de deux séries à termes positifs, tels que $a_n \leq b_n$ pour tout n . On a :

1. si la série de terme général b_n converge, alors celle de terme général a_n converge;
2. si la série de terme général a_n diverge, alors celle de terme général b_n diverge.

Ce théorème est en fait un corollaire de la proposition 1.3.

On dit que a_n est équivalent à b_n lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce que l'on note $a_n \sim b_n$, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ (où il existe N tel que $b_n \neq 0$ pour $n > N$).

Proposition 1.5. Soient a_n et b_n les termes généraux de deux séries à termes positifs telles que, à l'infini, $a_n \sim b_n$. Alors la série de terme général a_n est de même nature que la série de terme général b_n . Si elles sont convergentes,

on a l'équivalence des restes $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ tandis que si elles sont divergentes, on a l'équivalence des sommes partielles $\sum_{k=1}^n a_k \sim \sum_{k=1}^n b_k$.

Démonstration. Il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a $\frac{2}{3}a_n \leq b_n \leq \frac{3}{2}a_n$, ce qui entraîne que les séries sont de même nature. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que $(1 - \varepsilon)a_n \leq b_n \leq (1 + \varepsilon)a_n$ pour $n \geq N$. Si les séries sont convergentes, on a pour $n \geq N$ $(1 - \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, ce qui donne l'équivalence des restes. Si les séries sont divergentes, on a l'équivalence

$$\frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \sim \frac{\sum_{k=N}^n b_k}{\sum_{k=N}^n a_k}. \text{ Or } (1 - \varepsilon) \leq \frac{\sum_{k=N}^n b_k}{\sum_{k=N}^n a_k} \leq 1 + \varepsilon \text{ pour } n \geq N, \text{ donc pour } n$$

assez grand $1 - 2\varepsilon \leq \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\sum_{k=1}^n a_k} \leq 1 + 2\varepsilon$, ce qui est le résultat voulu. \square

Exemple : La série de Riemann. Soit $\alpha > 0$. La série de terme général $a_n = n^{-\alpha} - (n+1)^{-\alpha}$ converge vers 1, car

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Or $a_n = n^{-\alpha}(1 - (1 + 1/n)^{-\alpha}) \sim \alpha n^{-(\alpha+1)}$, donc pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $\alpha n^{-(\alpha+1)}$ converge, et donc la série de terme général $n^{-(\alpha+1)}$ converge aussi. De même, la série de terme général $a_n = \log(n+1) - \log(n)$ diverge, car $S_n = \log(n+1)$ tend vers $+\infty$ (lorsque $n \rightarrow +\infty$). Mais

$$\log(n+1) - \log(n) = \log(n(1 + 1/n)) - \log n = \log(1 + 1/n) \sim \frac{1}{n}$$

ce qui implique que la série de terme général $1/n$ diverge. Pour $\alpha < 1$, on a $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$, donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ diverge. Finalement, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$ (dite "série de Riemann") converge si et seulement si $\alpha > 1$.

1.2.2 Convergences et divergences triviales

Proposition 1.6 (Règle de Cauchy). *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.*

1. *S'il existe $0 < q < 1$ et $N > 0$ tels que $0 \leq a_n^{1/n} < q$ pour $n \geq N$, alors la série de terme général a_n converge.*
2. *Si $a_n^{1/n} \geq 1$ pour une infinité de termes, alors la série de terme général a_n diverge.*

Démonstration. 1) Comparaison avec une série géométrique.

2) Le terme général ne tend pas vers 0. □

Corollaire 1.7. *Soit a_n le terme général d'une série à termes positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{1/n} = \ell$. Si $\ell < 1$, alors la série converge et elle diverge si $\ell > 1$.*

Proposition 1.8 (Règle de d'Alembert). *Soit a_n le terme général d'une série à termes strictement positifs. Alors :*

1. *s'il existe $0 < q < 1$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ pour $n \geq N$, alors la série de terme général a_n converge.*
2. *s'il existe $N \geq 1$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pour $n \geq N$, alors la série de terme général a_n diverge.*

Démonstration. Dans le premier cas, on a $a_n \leq a_N q^{n-N}$ pour $n \geq N$. Dans le second cas, on a $a_n \geq a_N$ pour $n \geq N$, et le terme général ne tend pas vers 0 car on a une suite strictement croissante. □

Corollaire 1.9. *Soit a_n le terme général d'une série à termes strictement positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Si $0 < \ell < 1$, alors la série converge et elle diverge si $\ell > 1$.*

Il faut retenir que les règles de Cauchy et de d'Alembert sont des règles qui permettent de comparer le terme général de la série avec des suites géométriques.

1.2.3 Critère de Cauchy

Soit (a_n) une suite réelle ou complexe.

La série de terme général a_n converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \quad N < n < p, \quad \left| \sum_{k=n+1}^p a_k \right| < \varepsilon.$$

Remarquons que ce résultat est vrai car \mathbb{R} est complet.

1.2.4 Séries absolument convergentes

Proposition 1.10. *Si la série de terme général a_n est absolument convergente (c'est-à-dire la série de terme général $|a_n|$ converge), alors elle est convergente.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du critère de Cauchy. \square

Si on veut montrer qu'une série est convergente, la première question à se poser est : est-elle absolument convergente ? Ce n'est que si la réponse est négative qu'il faut se tourner vers des outils plus complexes.

1.2.5 Outils pour les séries semi-convergentes

Définition. *On dit qu'une série est semi-convergente si elle est convergente, mais pas absolument convergente.*

On dit que la série de terme général a_n est une série à termes alternés si pour tout n , $a_n a_{n+1} \leq 0$.

Proposition 1.11 (Critère spécial des séries alternées). *Soit a_n le terme général d'une série alternée telle que $(|a_n|)_n$ décroît et tend vers 0. Alors la série de terme général a_n converge et de plus le reste $R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k$ a le même signe que a_{N+1} et vérifie $|R_N| \leq |a_{N+1}|$.*

Démonstration. On suppose que le terme général s'écrit $a_n = (-1)^n b_n$, avec $b_n \geq 0$. On a alors

$$S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} b_{2n+2} + (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = b_{2n+2} - b_{2n+1} \leq 0$$

et $S_{2n} \geq S_{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (b_{2k} - b_{2k+1}) \geq 0$. Ainsi (S_{2n}) est une suite décroissante, minorée par 0, donc converge vers une limite ℓ , avec $0 \leq \ell \leq S_0 = b_0$. Comme b_n tend vers 0, $S_{2n+1} = S_{2n} - b_{2n+1}$ converge aussi vers ℓ . Finalement (S_n) converge vers ℓ qui a le même signe que le premier terme de la série et est plus petit en valeur absolue. En remplaçant la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ par $(a_{N+n})_{n \geq 1}$, on obtient le résultat voulu pour le reste. \square

Proposition 1.12 (Critère de Dirichlet). *Soient (a_n) une suite à valeurs réelles ou complexes telle que les sommes partielles de la série de terme général a_n sont bornées et (f_n) une suite décroissante de réels positifs de limite nulle. Alors la série de terme général $a_n f_n$ converge.*

Démonstration. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ pour $n \geq 0$. Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^p a_k f_k &= \sum_{k=n}^p (S_k - S_{k-1}) f_k = \sum_{k=n}^p S_k f_k - \sum_{k=n}^p S_{k-1} f_k \\ &= \sum_{k=n}^p S_k f_k - \sum_{k=n-1}^{p-1} S_k f_{k+1} \\ &= -S_{n-1} f_n + S_p f_p + \sum_{k=n}^{p-1} S_k (f_k - f_{k+1}). \end{aligned}$$

Cette écriture se nomme une transformation d'Abel. Il s'agit tout simplement d'une intégration par parties discrète.

Maintenant en posant $M = \sup\{|S_k|; k \in \mathbb{N}\}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^p a_k f_k \right| &\leq M f_n + M f_n + \sum_{k=n}^{p-1} M |f_k - f_{k+1}| \\ &= 2M f_n + \sum_{k=n}^{p-1} M (f_k - f_{k+1}) \leq 3M f_n. \end{aligned}$$

□

Le critère spécial des séries alternées est un cas particulier du critère de Dirichlet (on écrit $a_n = (-1)^n |a_n|$, ou $a_n = (-1)^{n+1} |a_n|$).

Il est très important de savoir effectuer une transformation d'Abel. On verra en exercice 13 une variante où la transformation est effectuée sur les restes, plutôt que sur les sommes partielles².

1.2.6 Bref rappel sur l'intégrale de Riemann

Le présent paragraphe ne vise pas à refaire toute la théorie de l'intégration de Riemann, mais juste à préciser les statuts relatifs de l'intégrale de Riemann et de ses extensions "impropres".

2. À l'inverse du critère spécial des séries alternées, le critère de Dirichlet n'est ni au programme des concours des grandes écoles, ni à celui des concours de recrutement des professeurs de l'enseignement secondaire. Il est donc très important de savoir refaire la preuve, d'autant plus que la terminologie n'est pas bien fixée.