# Jour n°1

## Exercice 1.0

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ inversible.
Montrer qu'il existe un polynôme P de degré $n-1$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

## Exercice 1.1

**1)** Pour $n$ entier $\geqslant 1$, montrer que l'équation $x^n + \sqrt{n}\,x - 1 = 0$ admet une unique solution $x_n \in [0\,;1]$.

**2)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

**3) a)** Donner un équivalent de $x_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**b)** $\boxed{\text{QS}}$ Donner un développement asymptotique à deux termes de $x_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 1.2

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

**1)** Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité qu'aucun des évènements $A_n, \ldots, A_{n+p}$ ne se réalise est inférieure ou égale à $\exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} \mathbb{P}(A_k)\right)$.

**2)** On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ est divergente.
Montrer qu'il est quasi impossible qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers $n$ pour lesquels $A_n$ est réalisé.

**3)** $\boxed{\text{QS}}$ On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ est convergente.
Montrer qu'il est quasi impossible qu'il y ait une infinité d'entiers $n$ pour lesquels $A_n$ est réalisé.

## Énoncé

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ inversible.
Montrer qu'il existe un polynôme P de degré $n-1$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

## Analyse stratégique de l'énoncé

$\hookrightarrow$ Cet exercice d'algèbre, très court, mentionne les polynômes de matrices. Il sera résolu très rapidement si l'on pense au théorème de Cayley-Hamilton. Un exercice très facile, qui exige cependant de bien connaître son cours.

## Corrigé

On sait que le polynôme caractéristique de $A$ est de degré $n$ et s'écrit :

$$\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{avec } a_n = 1 \text{ et } a_0 = (-1)^n \det A \neq 0 \text{ (car } A \text{ inversible).}$$

On dispose aussi du théorème de Cayley-Hamilton qui affirme que $\chi_A$ est annulateur de $A$, ce qui s'écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0$, ou encore $\sum_{k=1}^{n} a_k A^k = -a_0 \mathrm{I}_n$.

Ainsi $A(a_1 \mathrm{I}_n + \cdots + a_n A^{n-1}) = -a_0 \mathrm{I}_n$, et puisque $a_0$ est non nul, on obtient :

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1 \mathrm{I}_n + \cdots + a_n A^{n-1}) = P(A) \quad \text{avec } P = -\frac{1}{a_0}(a_1 + \cdots + a_n X^{n-1})}$$

($P$ est bien un polynôme de degré $n-1$ puisque $a_n \neq 0$).

## Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que la méthode utilisée dans le corrigé permet, si l'on connaît un polynôme annulateur de $A$ de coefficient constant non nul (par exemple le polynôme caractéristique), de calculer facilement $A^{-1}$ à l'aide des puissances de $A$.

♡ Il faut se souvenir du théorème de Cayley-Hamilton, et penser à l'utiliser dès que l'énoncé mentionne des polynômes de matrices (ou d'endomorphismes).

## Formulaire

- Si $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$, le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$ s'écrit :

$$\chi_A(X) = \det(X\mathrm{I}_n - A) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + a_1 X + (-1)^n \det(A)\,.$$

Lorsque ce polynôme est scindé, ses racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, distinctes ou non (qui sont les valeurs propres de $A$), vérifient donc, d'après les relations coefficients-racines :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr} A \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A\,.$$

## Énoncé

**1)** Pour $n$ entier $\geqslant 1$, montrer que l'équation $x^n + \sqrt{n}\,x - 1 = 0$ admet une unique solution $x_n \in [0\,;1]$.

**2)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

**3) a)** Donner un équivalent de $x_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**b)** $\boxed{\text{QS}}$ Donner un développement asymptotique à deux termes de $x_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit ici de l'étude d'une suite formée par les racines d'une certaine équation. Certaines méthodes d'étude d'une telle suite sont standard ; cependant, ce genre d'exercice, en particulier la recherche d'équivalents, demande un peu d'intuition.

**1)** Il s'agit ici de montrer qu'une équation possède une solution ; comme on ne sait pas résoudre exactement cette équation, on sera amené à étudier les variations d'une fonction convenable.

$\hookrightarrow$ Cette question ne doit pas poser de problème. La méthode est archi-classique : étude de fonction puis théorème de bijection.

**2)** Pour la recherche de la limite d'une suite, beaucoup d'entre vous commencent par en étudier les variations. Cela peut paraître intéressant puisqu'ici, la suite est bornée (par définition). Cependant cette étude n'est guère facile et d'ailleurs, l'énoncé ne demande que la limite, pas les variations.
Il vaut mieux examiner attentivement l'équation proposée, et voir comment on pourrait en déduire une majoration de $x_n$.

$\hookrightarrow$ Dans beaucoup de cas, des majorations et/ou minorations peuvent suffire pour déterminer la limite d'une suite. L'étude des variations ne doit pas être systématique.

**3)** La recherche d'un équivalent n'est pas toujours une chose facile. Il faut étudier l'équation vérifiée par $x_n$, et remarquer, après l'avoir rigoureusement justifié, que dans cette équation, $x_n^n$ est négligeable devant les autres termes..

Une fois l'équivalent trouvé, la démarche pour trouver un développement asymptotique à deux termes est toujours la même : si l'on a trouvé $x_n \sim u_n$, on posera $y_n = x_n - u_n$, de sorte que $y_n = o(u_n)$, puis on remplacera $x_n$ dans l'équation par $y_n + u_n$ pour essayer de trouver une relation intéressante sur $y_n$.

$\hookrightarrow$ Cette question est nettement plus difficile, et ne peut être abordée qu'après avoir traité correctement les deux premières.

## Corrigé

**1)** Pour tout $x \in [0\,;1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = x^n + \sqrt{n}\,x - 1$.
La fonction $f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\,;1]$, et $f_n'(x) = nx^{n-1} + \sqrt{n}$ est strictement positive sur $[0\,;1]$. On a donc le tableau de variations suivant.

| $x$ | $0$ | | $x_n$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt{n}$ |

$f_n$ étant continue strictement croissante, elle réalise une bijection de $[0\,;1]$ sur $[-1\,;\sqrt{n}]$. Puisque 0 appartient à $[-1\,;\sqrt{n}]$, il possède un unique antécédent $x_n$ par $f_n$.

$$\boxed{\text{Il existe un et un seul } x_n \in [0\,;1] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

**2)** Nous proposerons deux réponses à cette question.

- *Première solution :* utilisation de la définition de la limite.

  Les exercices où il faut revenir à la définition de la limite sont assez rares. Cette méthode est un peu délicate, mais elle peut être très performante et il faut faire l'effort de bien la comprendre.

  Pour tout $\varepsilon \in \,]0\,;1[$, *fixé*, on a :

  $$\lim_{n\to+\infty} f_n(\varepsilon) = \lim_{n\to+\infty} (\underbrace{\varepsilon^n}_{\to 0} + \sqrt{n}\,\varepsilon - 1) = +\infty,$$

  ce qui implique que $f_n(\varepsilon) > 0$ pour $n$ assez grand, donc $x_n < \varepsilon$, compte tenu des variations de $f_n$.
  Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $0 < x_n < \varepsilon$ pour $n$ assez grand, ce qui est exactement la définition de :

  $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.}$$

- *Seconde solution :* utilisation d'une majoration.
  L'idée est ici de comparer $x_n$ à des valeurs où il est facile d'estimer $f_n$.
  Avec un peu de réflexion, on peut penser à calculer :

  $$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

  Puisque $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$, l'étude des variations de $f_n$ montre que $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot$
  La conclusion est alors immédiate par le théorème des gendarmes.

  ↪ Comme nous aurons souvent l'occasion de le constater dans ce livre, cette solution montre que majorer et minorer sont les clés de tout raisonnement en analyse.

  > Rapport du jury 2016
  >
  > Si les théorèmes généraux sont connus, les bases de l'analyse, majorations, minorations, encadrements et dominations posent des problèmes insurmontables à beaucoup trop de candidats.

**3) a)** L'inégalité $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ obtenue ci-dessus implique en particulier $x_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $n \geqslant 2$.

Puisque $0 \leqslant x_n^n \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Or $\sqrt{n}\, x_n = 1 - x_n^n$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\, x_n = 1$, ce qui signifie exactement que :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot}$$

⚠ Une erreur malheureusement trop fréquente consiste à affirmer : « $0 < u_n < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ ». Cela est *faux* ! (Pensez par exemple à la suite définie par $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, dont la limite est $\frac{1}{\mathrm{e}}$).

Pour pouvoir conclure, il est indispensable d'exhiber une *constante* $k \in [0\,;1[$ telle que $u_n \leqslant k$ pour tout $n$.

**b)** L'équivalent obtenu ci-dessus s'écrit aussi $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + y_n$, où $y_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

La question posée revient donc à chercher un équivalent de $y_n$. La méthode consiste à remplacer $x_n$ dans l'égalité $f_n(x_n) = 0$ par le développement limité que l'on vient d'obtenir afin de trouver une relation sur $y_n$ et d'en déduire un équivalent.

On traduit donc la relation $x_n^n = 1 - \sqrt{n}\, x_n$ sous la forme :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + y_n\right)^n = 1 - \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + y_n\right) = -\sqrt{n}\, y_n\,,$$

d'où (on remarquera que $\frac{1}{\sqrt{n}} + y_n = x_n$ est strictement positif, ce qui permet d'en considérer le logarithme) :

$$-\sqrt{n}\, y_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+y_n\right)} = \mathrm{e}^{n\left[\ln\frac{1}{\sqrt{n}}+\ln(1+\sqrt{n}y_n)\right]} = \mathrm{e}^{n\left[\ln\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}\,y_n+o(\sqrt{n}\,y_n)\right]}\,,$$

le développement limité du ln étant possible puisque $\sqrt{n}\, y_n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (en effet, $y_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ par construction).

Ainsi : $-\sqrt{n}y_n = \mathrm{e}^{\frac{-n\ln n}{2}}\mathrm{e}^{n(\sqrt{n}\,y_n+o(\sqrt{n}\,y_n))}$. Mais :

$$\left|\sqrt{n}\, y_n\right| = \left|\sqrt{n}\, x_n - 1\right| = x_n^n \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ pour } n \geqslant 2,$$

donc, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n}\, y_n + o(\sqrt{n}\, y_n)) = 0$ et finalement :

$$-\sqrt{n}\, y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{\frac{-n\ln n}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{n})^n} \quad \text{d'où} \quad y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{(\sqrt{n})^{n+1}} \cdot$$

En conclusion :

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{(\sqrt{n})^{n+1}} + o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^{n+1}}\right) \cdot}$$

## Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne signifie pas seulement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, (lorsque $v_n \neq 0$), mais aussi (et surtout) : $u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n)$.

♡ Il faut se souvenir de la méthode pour obtenir un développement asymptotique de proche en proche : à partir d'un simple équivalent, qui peut s'écrire sous forme d'un développement limité à 1 terme, on considère la différence entre $x_n$ et cet équivalent, puis on « injecte » le résultat obtenu dans l'équation initiale afin d'obtenir une estimation de cette différence.
On aurait d'ailleurs pu réitérer le procédé, en considérant ici $z_n = x_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{(\sqrt{n})^{n+1}}$, pour essayer d'obtenir le terme suivant dans le développement asymptotique de $x_n$.

## Formulaire

• Théorème de bijection

Soit $f$ une application définie sur un *intervalle* $I$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose $f$ *continue* et *strictement monotone* sur $I$. Alors :

a) $f(I)$, image de $I$ par $f$, est un intervalle ;

b) $f$ est bijective de $I$ sur $f(I)$ ;

c) $f^{-1}$ est continue sur $f(I)$ ;

d) $f^{-1}$ est strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que $f$.

Nous rappelons ensuite quelques définitions importantes concernant le comportement asymptotique d'une suite.

• Limite d'une suite

. *Définitions*

Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ est dite convergente s'il existe $\ell \in E$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon\,.$$

Si $(u_n)$ est une suite convergente, le vecteur $\ell$ précédent est unique ; on l'appelle limite de la suite $u$, notée : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Dire que $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ peut aussi s'écrire :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \in V$$

($\mathcal{V}(\ell)$ désigne l'ensemble des voisinages de $\ell$ dans $E$).

L'intérêt de cette écriture est qu'elle permet de généraliser la définition de la limite au cas d'une suite réelle $(u_n)$ qui tend vers $\pm\infty$.

Soit en effet $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.
Par définition, un voisinage de $+\infty$ $\big($respectivement $-\infty\big)$ dans $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ $\big($respectivement $]-\infty\,;A[\big)$.

Ainsi, dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ s'écrira :

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n > A\,,$$

et dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ s'écrira :

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n < A\,.$$

. *Quelques propriétés*

1. Dire que $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$ signifie aussi que la suite réelle $\big(\, \|u_n - \ell\| \,\big)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
2. Toute suite convergente est bornée.
3. Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites d'éléments de $E$ convergentes respectivement vers $\ell$ et $\ell'$. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
4. Soit $(\lambda_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{K}$, et $(u_n)$ une suite d'éléments de $E$ convergente vers $\ell \in E$. Alors, la suite $(\lambda_n\, u_n)$ converge vers le vecteur $\lambda\, \ell$.

• Comparaisons de suites

. *Définitions*

Soit $(u_n)$ une suite à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $E$, et soit $(\alpha_n)$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

– On dit que la suite $(u_n)$ est dominée par $(\alpha_n)$ si et seulement si il existe un réel $M \in \mathbb{R}^*$ et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\|u_n\| \leqslant M|\alpha_n| \text{ pour tout } n \geqslant n_0\,.$$

On écrira alors (notations de Landau) : $u_n = \mathcal{O}(\alpha_n)$.

S'il existe un rang à partir duquel $\alpha_n$ est toujours non nul, on a l'équivalence :

$$u_n = \mathcal{O}(\alpha_n) \iff \text{la suite } \left(\frac{1}{\alpha_n}\, u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

– Soit $(u_n)$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé $E$, et soit $(\alpha_n)$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la suite $(u_n)$ est négligeable devant $(\alpha_n)$ si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\|u_n\| \leqslant \varepsilon|\alpha_n| \text{ pour tout } n \geqslant n_0\,.$$

On écrira alors (notations de Landau) : $u_n = o(\alpha_n)$.

S'il existe un rang à partir duquel $\alpha_n$ est toujours non nul, on a l'équivalence :

$$u_n = o(\alpha_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha_n}\, u_n = 0\,.$$

– Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites à valeurs dans un espace vectoriel normé $E$.

On dit que $u$ et $v$ sont équivalentes et on écrira $u_n \sim v_n$, si et seulement si :

$$u_n - v_n = o(\|u_n\|)$$

(ou, ce qui revient au même : $u_n - v_n = o(\|v_n\|)$) .

Si $u$ admet une limite $\ell$ dans $E$ et si $v \sim u$, alors $v$ converge et admet la même limite $\ell$.

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites *à valeurs dans* $\mathbb{K}$. Si $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou au moins à partir d'un certain rang), on a l'équivalence :

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Ce résultat permet de montrer facilement que la relation $\sim$ est bien une relation d'équivalence dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- *Propriétés de $o$ et $O$*

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ des suites à valeurs dans un espace vectoriel normé $E$, $\lambda$ et $\mu$ des scalaires et $(\alpha_n)$, $(\beta_n)$, $(\alpha'_n)$, $(\beta'_n)$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Si $u_n = O(\alpha_n)$ et $v_n = O(\alpha_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = O(\alpha_n)$.
2. Si $u_n = O(\alpha_n)$ et $\alpha_n = O(\alpha'_n)$, alors $u_n = O(\alpha'_n)$.
3. Si $u_n = O(\alpha_n)$ et $\beta_n = O(\beta'_n)$, alors $\beta_n u_n = O(\alpha_n \beta'_n)$.
4. Si $u_n = o(\alpha_n)$, alors $u_n = O(\alpha_n)$.
5. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $v_n = o(\alpha_n)$, alors $\lambda u_n + \mu v_n = o(\alpha_n)$.
6. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $\alpha_n = o(\alpha'_n)$, alors $u_n = o(\alpha'_n)$.
7. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et $\beta_n = o(\beta'_n)$, alors $\beta_n u_n = o(\alpha_n \beta'_n)$.
8. Si $u_n = o(\alpha_n)$ et si $(\lambda_n)$ est une suite bornée de scalaires, alors $\lambda_n u_n = o(\alpha_n)$.
9. $u_n = O(1) \iff (u_n)$ est bornée.
10. $u_n = o(1) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
11. $u_n = O(0) \iff u_n = o(0) \iff (u_n)$ est nulle à partir d'un certain rang.

- *Propriétés de $\sim$*

Soient $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ et $(x_n)$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Si $u_n \sim w_n$ et si $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n \sim w_n$.
2. Si $u_n \sim w_n$, si $v_n \sim w_n$ et <u>si $\lambda + \mu \neq 0$</u>, alors $\lambda u_n + \mu v_n \sim (\lambda + \mu) w_n$ (*on peut donc additionner les équivalents sous certaines conditions...*).
   Ce résultat étant assez méconnu, il faut savoir le prouver (par exemple, dans le cas où la suite $(w_n)$ ne s'annule pas, en faisant le quotient).
3. Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$ alors $u_n v_n \sim w_n x_n$.
4. Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et si $u_n \sim v_n$, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout réel $\alpha$.
5. Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, si $u_n \sim v_n$ et si $(u_n)$ (ou $(v_n)$) a une limite *différente de* 1 (éventuellement $+\infty$), alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

   Lorsque $(u_n)$ tend vers 1, cette propriété tombe en défaut ; on a alors simplement, compte tenu de l'équivalent de ln au voisinage de 1, $\ln u_n \sim u_n - 1$.

L'énumération de toutes ces propriétés peut vous paraître fastidieuse, mais elles sont toutes utiles à un moment ou un autre dès lors que l'on recherche des développements asymptotiques.