Chapitre 1

Fonctions différentiables

1.1 Problème 1

1) Considérons une fonction f de deux variables réelles x et y, définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que si l'une des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de la fonction f existe au point $a = (a_1, a_2)$ et si l'autre dérivée partielle existe dans un voisinage de a et est continue en a, alors la fonction f est différentiable en a.

b) Que peut-on remarquer au niveau de cet énoncé ?

2) Etudier la différentiabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

3) Même question pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

4) Même question pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, & \text{si } xy \neq 0 \\ 0, & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

$\diamondsuit$ ***Solution*** : **1)** a) Sans perte de généralité, on suppose que c'est la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ qui existe au point $a = (a_1, a_2)$ et soit $B(a, r)$, $r > 0$, une boule ouverte centrée en a, contenue dans Ω (voisinage de a) et telle que l'autre dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $B(a,r)$ et est continue en a. Nous allons montrer que sous les hypothèses de l'énoncé,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)-h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)}{\|h\|}=0.$$

On a

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2), \\ &= f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2) \\ &\quad +f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis : $\exists\theta_1,\theta_2\in]0,1[$, tels que :

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2+h_2)=h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2),$$

et

$$f(a_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2+\theta_2 h_2),$$

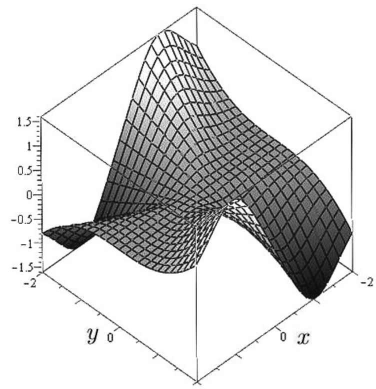
on obtient alors pour $h_2\neq 0$,

$$\begin{aligned} & f(a+h)-f(a)-h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)-h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)= \\ & h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)\right) \\ & \qquad +h_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2+\theta_2 h_2)-\frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)\right). \end{aligned}$$

Le premier terme entre parenthèses tend vers zéro du fait de la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Le dernier terme entre parenthèses tend aussi vers zéro en vertu de la définition de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)$, ce qui montre que la fonction f est différentiable au point a.

b) On remarque évidemment au niveau de la solution ci-dessus (ainsi que celle proposée dans [Lesfari, A. : Fonctions différentiables. *Quadrature*, Paris, No. 84, pp.45-47, 2012]) que dans le cas d'une fonction $f(x,y)$ à deux variables la condition suffisante de différentiabilité de cette fonction consiste à utiliser la continuité d'une des dérivées partielles mais pas les deux ! La continuité de toutes les dérivées partielles intervient seulement pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs (bien que cela n'a pas beaucoup d'importance étant donné que la plus part des exercices que l'on rencontre à ce niveau concernent des fonctions à deux variables !), on voit aussi au niveau de la solution que cet énoncé se généralise facilement pour le cas d'une fonction à plusieurs variables mais en affaiblissant la condition de continuité des dérivées partielles en demandant seulement la continuité par rapport à certaines variables.

2) La figure ci-dessous représente la surface d'équation : $z = f(x, y)$.



La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Le seul point problématique est à l'origine. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^3(y^2-3x^4)}{(x^4+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{xy^2(3x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2},\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Comme f est une fonction à deux variables, il suffit donc d'après 1) de prouver que l'une de ces dérivées partielles est continue en $(0,0)$. On a

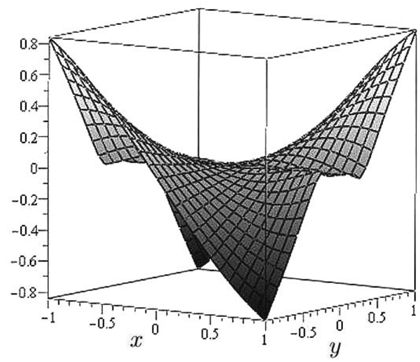
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{(x^4+y^2)^{1/4}.(x^4+y^2).3(x^4+y^2)}{(x^4+y^2)^2} = 3(x^4+y^2)^{1/4},$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Dès lors, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$ et on en déduit que f est différentiable en $(0,0)$. Par conséquent, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Dans cet exemple la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ car la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est aussi continue en $(0,0)$, mais on n'est pas obligé de le vérifier pour montrer que f est différentiable.

3) La figure ci-dessous représente la surface d'équation : $z = f(x,y)$.



La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(a,0)\}$, $a \in \mathbb{R}$, comme produit et composée de fonctions différentiables. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\cos\frac{x}{y},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y},\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

En outre,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |y|,$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

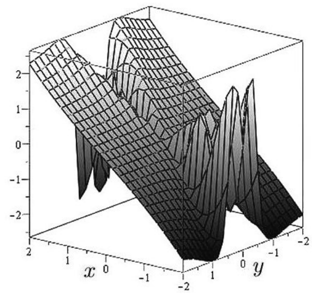
ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. Donc la fonction f est différentiable en $(0,0)$. De même, la fonction f est différentiable en $(a,0)$, $a \neq 0$ car $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent au point $(a,0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = 0,$$

et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(a,0)$;

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,0).$$

Notons que pour ce dernier cas, si $a \neq 0$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en $(a,0)$ puisque $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'existe pas. En conclusion, la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. La figure ci-dessous représente la discontinuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.



4) La fonction f est continue et différentiable en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où $xy \neq 0$. La fonction f est continue aux points $(0,0)$, $(\frac{1}{k\pi},0)$ et $(0,\frac{1}{k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}^*$, car on a respectivement pour ces points,

$$|f(x,y)| = \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x^2+y^2|,$$

$$|f(x,y)| = \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leq \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\right|,$$

$$|f(x,y)| = \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leq \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{y}\right|,$$

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. La fonction f n'est pas continue aux points $(\alpha,0)$ et $(0,\alpha)$ où $\alpha \notin \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}^*\}$ car on a respectivement pour ces points,

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to\alpha}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) \text{ n'existe pas,}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to\alpha}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right) \text{ n'existe pas.}$$

On en déduit que f n'est pas différentiable (puisqu'elle n'est pas continue) aux points $(\alpha,0)$ et $(0,\alpha)$ où $\alpha \notin \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}^*\}$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} - \left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} - \left(\frac{x^2+y^2}{y^2}\right)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}.$$

Au point $(0,0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0, \end{aligned}$$

existent. Cependant, comme les dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h,0)-f(\alpha,0)}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,\alpha) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,\alpha+h)-f(0,\alpha)}{h}, \end{aligned}$$

n'existent pas si $\alpha \notin \{0\} \cup \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}^*\}$, on ne peut donc utiliser 1) et on va utiliser la définition pour étudier la différentiabilité de f au point $(0,0)$. Aux points $(\frac{1}{k\pi}, 0)$ et $(0, \frac{1}{k\pi})$, la fonction f admet des dérivées partielles mais elle n'est pas différentiable en ces points puisque

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0) \\ h=k}} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{(h,k)\to(0,0) \\ h=k}} \frac{f(\frac{1}{\alpha\pi}+h,k) - f(\frac{1}{\alpha\pi},0) - 0}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

n'existe pas, ce qui implique que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\frac{1}{\alpha\pi}+h,k) - f(\frac{1}{\alpha\pi},0) - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} \neq 0.$$

1.2 Problème 2*

1) Soient E un espace vectoriel euclidien, f l'application définie sur E par

$$x \longmapsto \| x \|,$$

et g l'application définie sur $E \setminus \{0\}$ par

$$x \longmapsto \frac{x}{\| x \|^2}.$$

a) Montrer que f n'est pas différentiable en 0.
b) Montrer que f est différentiable sur $E\setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle.
c) Montrer que g est différentiable sur $E\setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle.
2) Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$. Montrer que l'application :

$$f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad A \longmapsto A^p, \quad p \in \mathbb{N}^*,$$

est différentiable en tout point et déterminer sa différentielle.

3) Soit $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre n inversibles. Montrer que l'application :
$$f : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad A \longmapsto A^{-1},$$
est différentiable en tout point et que
$$\forall (A, H) \in GL_n(n, \mathbb{K})^2, \quad df(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

$\diamondsuit$ ***Solution*** : **1)** a) Montrons que f n'admet pas de dérivée suivant tout vecteur. Il suffit de considérer un vecteur unitaire e. Or la dérivée de f en 0 dans la direction e est
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(he)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{|h|}{h},$$
et cette limite n'existe pas. Donc f n'est pas différentiable en 0.

b) On a $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, où $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire. Dès lors,
$$\begin{aligned} f(x+h) = \|x+h\| &= \left(\|x\|^2 + 2\|x\|.\|h\| + \|h\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \left(\|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \|x\|\left(1 + 2\frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \|x\| + \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|} + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Par conséquent, f est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et on a
$$df_x(h) = \frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|}.$$

c) En raisonnant comme ci-dessus, on obtient
$$\begin{aligned} g(x+h) = \frac{x+h}{\|x+h\|^2} &= \frac{x+h}{\|x\|^2}\left(1 + 2\frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}\right)^{-1}, \\ &= \frac{x+h}{\|x\|^2}\left(1 - 2\frac{\langle x, h\rangle}{\|x\|^2} + o(\|h\|\right), \\ &= g(x) + \frac{1}{\|x\|^2}\left(h - 2\frac{\langle x, h\rangle x}{\|x\|^2}\right) + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Dès lors, g est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et on a
$$dg_x(h) = \frac{1}{\|x\|^2}\left(h - 2\frac{\langle x, h\rangle x}{\|x\|^2}\right).$$

2) Cette application étant polynomiale, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On a

$$f(A+B) = (A+B)^p = (A+B)(A+B)\cdots(A+B), \quad (p \text{ fois}),$$

d'où,

$$f(A+B) = f(A) + d_A(B) + o(\|B\|),$$

où

$$df_A : B \longmapsto BA^{p-1} + ABA^{p-2} + \cdots + A^{p-1}B = \sum_{k=0}^{p-1} A^k BA^{p-k-1}, \text{(linéaire)}.$$

3) Par définition, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det A \neq 0$. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$. Notons que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$ car $GL_n(\mathbb{R}) = g^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue

$$g : A \in M_n(\mathbb{R}) \longmapsto \det A.$$

La fonction

$$f : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad A \longmapsto A^{-1},$$

est continue ($A^{-1} = \frac{{}^t(comA)}{\det A}$). Montrons que :

$$(A+H)^{-1} = A^{-1} + df(A)(H) + \varepsilon(H), \quad \lim_{\substack{H \to 0 \\ H \neq 0}} \frac{\varepsilon(H)}{\|H\|} = 0,$$

ou ce qui revient au même,

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} - (-A^{-1}HA^{-1}) = o(\|H\|).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
(A+H)^{-1} - A^{-1} - (-A^{-1}HA^{-1}) &= \left((A+H)^{-1}A - I\right) A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}, \\
&= (A+H)^{-1}(A - (A+H))A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}, \\
&= -(A+H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1}, \\
&= \left(-(A+H)^{-1} + A^{-1}\right) HA^{-1},
\end{aligned}$$

d'où,

$$\|(A+H)^{-1} - A^{-1} - (-A^{-1}HA^{-1})\| \leq \| - (A+H)^{-1} + A^{-1}\|.\|H\|.\|A^{-1}\|.$$

Comme la fonction f est continue, alors l'expression : $-(A+H)^{-1} + A^{-1}$ tend vers 0 quand $H \to 0$ et le résultat en découle.