

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et f un endomorphisme de \mathbb{R}^n .

- On note $Id_{\mathbb{R}^n}$ l'endomorphisme identité de \mathbb{R}^n et $0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ l'endomorphisme nul de \mathbb{R}^n .
- On pose $f^0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ et $\forall j \in \mathbb{N}, f^{j+1} = f \circ f^j$.
- On suppose que f^n est l'endomorphisme nul de \mathbb{R}^n : $f^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$.

1°) Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Déterminer le spectre de M . La matrice M est-elle diagonalisable ?
- b) Préciser le rang des matrices M et M^2 respectivement.
- c) Quels sont les polynômes annulateurs de M dont le degré est égal à 3 ?

2°) Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et r_j son rang : $F_j = \text{Im}(f^j)$ et $r_j = \dim(F_j)$.

Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note g_j la restriction de f à F_j , c'est-à-dire l'application linéaire de F_j dans \mathbb{R}^n définie par : $\forall x \in F_j, g_j(x) = f(x)$.

- a) Calculer r_0 et r_n .
- b) Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 - i) Déterminer le rang de g_j .
 - ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim(\text{Ker}(f) \cap F_j)$.
- c) Etablir les inégalités : $n \geq r_0 - r_1 \geq r_1 - r_2 \geq \dots \geq r_{n-1} - r_n \geq 0$.

On rappelle que le cardinal d'un ensemble fini H , noté $\text{Card}(H)$, est le nombre de ses éléments.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des k -uplets (x_1, \dots, x_k) d'entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^k ix_i = k$, c'est-à-dire :

$$P(k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k; x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = k\}$$

On pose : $p(k) = \text{Card}(P(k))$.

3°) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$x_i = \text{Card}(\{j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, r_j - r_{j+1} = i\}) \quad (*)$$

- a) Montrer que (x_1, \dots, x_n) est un élément de $P(n)$.
- b) Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

iii) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de \mathbb{R}^4 vérifiant (*).

4°) Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose

$$Q(\ell, k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in P(k), x_1 + \dots + x_k \leq \ell\}$$

et $q(\ell, k) = \text{Card}(Q(\ell, k))$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

ii) Pour tout entier $\ell \geq k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

b) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geq 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k - \ell) = \text{Card}\{\{x_1, \dots, x_k\} \in P(k), x_1 + \dots + x_k = \ell\}$$

c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité :

$$q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$$

ii) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell)$?

5°) La fonction scilab dont le script est incomplet (lignes 5 et 6), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(\ell, k)$.

```
(1) fonction q = qmatrix(n)
(2)   q = ones(n,n) ;
(3)   for L = 2 : n
(4)     for K = 2 : n
(5)       if (K < L) then q(L,K) = ...
(6)         else if (K = L) then q(L,K) = ...
(7)           else q(L,K) = q(L - 1,K)+q(L,K - L) ; end ;
(8)       end ;
(9)     end ;
(10)   end ;
(11) endfunction
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

→ qmatrix 9

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	2	3	3	4	4	5	5
1	2	3	4	5	7	8	10	12
1	2	3	5	6	9	11	15	18
1	2	3	5	7	10	13	18	23
1	2	3	5	7	11	14	20	26
1	2	3	5	7	11	15	21	28
1	2	3	5	7	11	15	22	29
1	2	3	5	7	11	15	22	30

a) Compléter les lignes (5) et (6) du script de la fonction qmatrix.

b) Donner un script scilab permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

c) Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$ applicable à tout entier $k \geq 1$, puis la démontrer.

Problème

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
- On note n un entier supérieur ou égal à 2.

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans différents schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires X_1, \dots, X_n suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p , avec $0 < p < 1$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X_k = 1) = p \text{ et } P(X_k = 0) = 1 - p$$

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \frac{\text{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ r & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

1°) a) Dans les deux cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n X_k$ en fonction de n et p .

- i) Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.
- ii) Les variables X_1, \dots, X_n sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\sum_{k=1}^n X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

b) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la variance de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^k X_i$ est donnée par la formule : $V\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) = kp(1-p)(1+(k-1)r)$.

c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\frac{1}{n-1}$.

2°) On suppose dans cette question que n est égal à 2.

a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a :

$$P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = p(2p - 1)$$

b) Que vaut alors $P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$?

c) En déduire que r ne peut être égal à -1 que lorsque

$$p = \frac{1}{2} \text{ et } P(X_1 + X_2 = 1) = 1$$

3°) On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que

$$P\left(\sum_{k=1}^n X_k = 1\right) = 1.$$

a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n .

b) Déterminer les n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^n$ pour lesquels la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k = x_k)\right)$ est strictement positive et la calculer.

Partie II. Loïs bêta-binomiales

4°) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Justifier que l'intégrale $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

b) Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité : $\int_{1/2}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_{\varepsilon}^{1/2} t^{y-1}(1-t)^{x-1} dt$.

c) En déduire que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Dans toute la suite du problème, on pose :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

5°) Soit x et y des réels strictement positifs.

a) A l'aide d'une intégration par parties, établir la relation :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} B(x, y+1)$$

b) En déduire l'égalité : $B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y)$.

6°) Pour tout réel z soit $((z)^{[m]})_{m \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$z^{[0]} = 1 \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}, (z)^{[m+1]} = (z+m)(z)^{[m]}$$

(par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$).

Etablir pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout couple d'entiers (k, ℓ) tels que $0 \leq k \leq \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} B(x, y)$$

7°) Soit a et b des réels strictement positifs.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose : $p_k = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

a) A l'aide de la relation obtenue dans la question **6°)** montrer que $\sum_{k=0}^n p_k = 1$.

On dit qu'une variable aléatoire S suit la loi bêta-binomiale $B(n; a, b)$ si

$$S(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et si : } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(S = k) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

b) Reconnaître la loi $B(n; 1, 1)$.

c) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $B(n; a, b)$ est égale à $\frac{na}{a+b}$.

Partie III. Un modèle possible dans le cas où $n = 2$

Soit a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ telles que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2, P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2)) = \frac{B(a+x_1+x_2, b+2-x_1-x_2)}{B(a, b)}$$

8°) a) Montrer que les deux variables aléatoires X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.

b) Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $B(2; a, b)$.

c) Etablir la relation $P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{a+1}{a+b+1}$.

9°) La fonction Scilab suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)) effectue une simulation des deux variables aléatoires X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

- (1) fonction `x = randbetabin(a,b)`
- (2) `x= zeros(1,2)`
- (3) `u = (a+b)*rand()`

```

(4) v = (a+b+1)*rand()
(5) if (u<a) then x(1,1)=1; if ... then x(1,2) = 1; end;
(6) else if ... then x(1,2) = 1; end;
(7) end;
(8) endfunction

```

a) Préciser la loi simulée par la variable u de la ligne (3).

b) Compléter les lignes (5) et (6).

10° a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2 .

b) Soit (p, r) un couple de réels vérifiant $0 < p < 1$ et $0 < r < 1$.

Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r .

Corrigé

Exercice

[Pour alléger nous noterons simplement id et 0 , l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul, la dimension n étant sous-entendue.]

Question 1. _____

a) La matrice M est trigonale supérieure, donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale et 0 est la seule valeur propre de M :

$$\text{Spec}(M) = \{0\}$$

Si M était diagonalisable, M serait semblable à la matrice diagonale de coefficients diagonaux tous nuls donc serait semblable à la matrice nulle, *i.e.* serait la matrice nulle. Comme M n'est pas la matrice nulle, on conclut :

M n'est pas diagonalisable

b) On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc un examen des colonnes de ces matrices donne aisément :

$$\text{rg}(M^2) = 1; \text{rg}(M) = 2$$

c) Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ tel que $P(M) = aM^3 + bM^2 + cM + dI_3 = 0$.

Un calcul simple montre que $M^3 = M^2M = 0$, donc les calculs précédents

donnent : $P(M) = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & c & b \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = 0$, ce qui équivaut à $b = c = d = 0$.

Les polynômes annulateurs de M de degré 3 sont donc les polynômes aX^3 , $a \in \mathbb{R}^*$.

Question 2. _____

a) $r_0 = \dim(F_0) = \dim(\text{Im}(f^0)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$

\star Comme $f^n = 0 : r_n = \dim(F_n) = \dim(\text{Im}(f^n)) = \dim(\{0\}) = 0.$

b) i) On a : $\text{Im}(g_j) = f(F_j) = f(f^j(\mathbb{R}^n)) = f^{j+1}(\mathbb{R}^n) = F_{j+1}.$

Donc :

$$\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \text{rg}(g_j) = \dim \text{Im}(g_j) = r_{j+1}$$

Comme $f^n = 0$, on a $g_n = 0$ et le résultat précédent reste valable pour $j = n$, car $r_{n+1} = 0.$

ii) On a $g_j \in \mathcal{L}(F_j, \mathbb{R}^n)$, donc, par le théorème du rang :

$$r_j = \dim F_j = \dim \text{Im } g_j + \dim \text{Ker } g_j$$

Or : $\text{Ker } g_j = \{x \in F_j, g_j(x) = 0\} = \{x \in F_j, f(x) = 0\} = F_j \cap \text{Ker } f$ et ainsi :

$$r_j = \dim(\text{Ker } f \cap F_j) + \dim \text{Im}(g_j) = \dim(\text{Ker } f \cap F_j) + \text{rg } g_j$$

$$r_j = \dim(\text{Ker } f \cap F_j) + r_{j+1}$$

c) On a trivialement $F_n \subset F_{n-1} \subset \dots \subset F_1 \subset F_0$ (car si $x \in F_k$, avec $k \geq 1$, alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = f^k(y) = f^{k-1}(f(y))$ et $x \in F_{k-1}$).

Par conséquent :

$$(F_n \cap \text{Ker } f) \subset (F_{n-1} \cap \text{Ker } f) \subset \dots \subset (F_1 \cap \text{Ker } f) \subset (F_0 \cap \text{Ker } f)$$

et les inclusions entraînant des inégalités de dimension :

$$0 \leq \dim(F_n \cap \text{Ker } f) \leq \dim(F_{n-1} \cap \text{Ker } f) \leq \dots \leq \dim(F_0 \cap \text{Ker } f)$$

Soit, par le résultat **b) ii)** :

$$0 \leq r_{n-1} - r_n \leq r_{n-2} - r_{n-1} \leq \dots \leq r_0 - r_1 \leq n$$

En effet, la dernière inégalité $r_0 - r_n \leq n$ est banale puisque $r_0 = n$ et $r_1 \geq 0$. En fait comme f est un endomorphisme nilpotent, il n'est pas bijectif et on a même $r_1 > 0$, donc $r_0 - r_1 \leq n - 1$.

Question 3. _____

a) Par télescopage : $r_0 - r_n = \sum_{j=0}^{n-1} (r_j - r_{j+1}).$

Par définition des x_i , la somme de droite comporte x_1 termes valant 1, x_2 termes valant 2, ..., x_n termes valant n (il n'est pas nécessaire de regarder s'il existe des termes nuls car ils n'auraient aucune contribution dans la somme).

Ainsi, en regroupant les termes selon leur valeur :

$$n = r_0 - r_n = \sum_{i=1}^n i x_i \quad (*)$$

et $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est bien élément de $P(n)$.

b) i) On a vu que pour la matrice M de l'énoncé, on a : $\text{rg}(M^0) = 4$ (valable pour toute matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$), $\text{rg}(M) = 2$, $\text{rg}(M^2) = 1$ et $\text{rg}(M^3) = \text{rg}(M^4) = 0$.

Ainsi : $r_0 - r_1 = 2, r_1 - r_2 = r_2 - r_3 = 1$ et $r_3 - r_4 = 0$. Donc dans la formule (*) un terme vaut 2 et deux termes valent 1 et $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0)$.

ii) On doit décomposer 4 en sommes d'entiers positifs. Pour cela on ordonne selon la taille des éléments utilisés, ce qui permet de n'oublier personne :

$$4 = 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Ce qui donne (dans le même ordre) :

$$P(4) = \{(0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (4, 0, 0, 0)\}$$

Donc $p(4) = 5$.

iii) Déterminons des endomorphismes convenables par leurs matrices dans la base canonique de \mathbb{R}^4 .

→ Pour $N = 0$, on a $\text{rg}(N^0) = 4$ et $\text{rg}(N) = \text{rg}(N^2) \text{rg}(N^3) = 0$, donc en calculant les différents $r_i - r_{i-1}$ on obtient : $X = (0, 0, 0, 1)$.

→ Pour $N = M^2$, on a $N^2 = 0$ et $\text{rg}(N^0) = 4$, $\text{rg}(N) = 1$ et $\text{rg}(N^2) = 0$, $\text{rg}(N^3) = 0$, donc $X = (1, 0, 1, 0)$.

→ Pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a encore $N^2 = 0$ et $\text{rg}(N^0) = 4$, $\text{rg}(N) = 2$

et $\text{rg}(N^2) = \text{rg}(N^3) = 0$, donc $X = (0, 2, 0, 0)$.

→ Pour M on a vu que $\text{rg}(M^0) = 4$, $\text{rg}(M) = 2$, $\text{rg}(M^2) = 1$ et $\text{rg}(M^3) = 0$, $\text{rg}(M^4) = 0$, donc $X = (2, 1, 0, 0)$.

→ Enfin pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^4 = 0$$

Donc $\text{rg}(N^0) = 4$, $\text{rg}(N) = 3$, $\text{rg}(N^2) = 2$, $\text{rg}(N^3) = 1$ et $\text{rg}(N^4) = 0$, donc $X = (4, 0, 0, 0)$.

On a bien trouvé une matrice adéquate pour chaque élément de $P(4)$.

Question 4. _____

a) i) On cherche d'abord tous les k -uplets d'entiers naturels (x_1, x_2, \dots, x_k) tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq 1$. Les solutions sont le k -uplet nul et les k -uplets dont un coefficient vaut 1 et les autres sont nuls, il existe donc k éléments de cette seconde catégorie.

Le k -uplet nul n'est pas dans $P(k)$ et tous les k -uplets ayant un seul terme valant 1 qui n'est pas le dernier terme ne sont pas dans $P(k)$ (la somme des ix_i est égale au rang du terme non nul donc est strictement inférieure à k). Le seul élément convenable est donc le k -uplet $(0, 0, \dots, 1)$:

$$\boxed{Q(1, k) = \{(0, 0, \dots, 1)\}}$$