Déterminer la forme canonique

Quand on ne sait pas !

- La plupart des polynômes du second degré peuvent s'écrire sous 3 formes : développée, factorisée et canonique.

EXEMPLE 1 $A(x) = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2$. Ici, A est sous forme factorisée.

EXEMPLE 2 $B(x) = 2x^2 - 11x - 21$. Ici, B est sous forme développée.

EXEMPLE 3 $C(x) = 3(x + 2)^2 + 5$. Ici, C est sous forme canonique.

- La forme canonique de l'expression $A(x) = ax^2 + bx + c$ est du type :

$$A(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Que faire ?

- Dans un premier temps, on détermine les valeurs de a, b et c.
- Ensuite on calcule les valeurs de α et β à l'aide des formules de cours :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- On peut maintenant mettre A sous forme canonique en remplaçant α et β par leur valeur dans la formule :

$$A(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

REMARQUE On constate avec cette égalité que l'on a : $\beta = A(\alpha)$.

EXEMPLE 4 $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

- On a : $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$.
- On en déduit : $\alpha = \frac{5}{6}$ et $\beta = -\frac{1}{12}$.

- On trouve alors : $A(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{12}$.

Conseils

Il faut faire attention aux signes dans les calculs, ainsi le moins devant la barre de fraction pour le calcul de β s'applique à l'ensemble de la fraction. Il faut prendre garde également au fait que le carré d'un nombre négatif est un nombre positif : par exemple, le carré de –3 s'écrit $(-3)^2$, et non pas -3^2 qui est égal à –9.

Il est toutefois plus facile de calculer la valeur de β en considérant l'égalité :

$$\beta = A(\alpha)$$

Ne pas hésiter à développer l'expression obtenue pour vérifier si elle est égale à celle du départ.

Exemple traité

Mettre sous forme canonique l'expression suivante :

$$A(x) = -x^2 + 2x + 5$$

SOLUTION

On repère les valeurs de *a, b* et *c* : $a = -1, b = 2, c = 5$.

- On calcule α : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2} = 1$.
- On calcule ensuite β, le plus simple est de le calculer avec :

  $\beta = A(\alpha) = -(1)^2 + 2 \times 1 + 5 = 6$ (ce calcul est plus rapide et moins générateur de fautes de signe).

  On peut donc conclure sur la forme canonique de *A* :

  $A(x) = -1(x-1)^2 + 6$ ou $A(x) = -(x-1)^2 + 6$ ou si l'on préfère :

$$A(x) = 6 - (x-1)^2$$

Exercices

Exercice 1.1 Mettre sous forme canonique $A(x) = -2x^2 + 8x$.

Exercice 1.2 Mettre sous forme canonique $B(x) = (-3x + 6)^2 + 1$.

Exercice 1.3 Mettre sous forme canonique $C(x) = -\sqrt{3}x + x^2 - 1$.

Exercice 1.4 Mettre sous forme canonique $D(x) = (2x+1)(1-3x)$.

Exercice 1.5 Mettre sous forme canonique :

$$E(x) = (x-3)(2x+7) - (x+4)(1-3x)$$

Pour vous aider à démarrer

Exercice 1.1	Attention, ici on a : $c = 0$
Exercice 1.2	Il faut d'abord développer B ou mettre le -3 en facteur dans le carré.
Exercice 1.3	Il faut ordonner C.
Exercice 1.4	Développer D
Exercice 1.5	Développer E puis réduire et ordonner.

Solutions des exercices

Exercice 1.1

Comme $A(x) = -2x^2 + 8x$, on a alors : $a = -2$, $b = 8$, $c = 0$.

Ceci permet de calculer α et β.

$$\alpha = -\frac{8}{-4} = 2 \text{ et } \beta = A(\alpha) = -2 \times 2^2 + 8 \times 2 = 8$$

La forme canonique de A est donc :

$$A(x) = -2(x-2)^2 + 8$$

Exercice 1.2

On développe d'abord B et on obtient $B(x) = 9x^2 - 36x + 37$.

On a alors : $a = 9$, $b = -36$, $c = 37$, ce qui permet de calculer les valeurs de α et de β. On trouve : $\alpha = \frac{36}{18} = 2$ et $\beta = B(\alpha) = B(2) = 1$.

La forme canonique de B est :

$$B(x) = 9(x-2)^2 + 1$$

REMARQUE On pouvait choisir de mettre –3 en facteur dans le carré, ce qui donnait : $B(x) = (-3(x-2))^2 + 1 = (-3)^2(x-2)^2 + 1 = 9(x-2)^2 + 1$.

Exercice 1.3

On ordonne C suivant les puissances décroissantes de x, ce qui donne :

$$C(x) = x^2 - \sqrt{3}x - 1$$

Comme $a = 1, b = -\sqrt{3}, c = -1$, on a alors les valeurs de α et β.

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \beta = -\frac{7}{4}$$

La forme canonique de C est :

$$C(x) = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$$

Exercice 1.4

On développe la forme factorisée de D : $D(x) = -6x^2 - x + 1$. On détermine ensuite α et β. On trouve $\alpha = -\frac{1}{12}$ et $\beta = \frac{25}{24}$ et D peut s'écrire sous la forme suivante :

$$D(x) = -6\left(x + \frac{1}{12}\right)^2 + \frac{25}{24}$$

Exercice 1.5

On développe d'abord E :

$E(x) = 2x^2 + 7x - 6x - 21 - (x - 3x^2 + 4 - 12x)$ puis on réduit et on ordonne, ce qui donne :

$$E(x) = 2x^2 + x - 21 + 11x + 3x^2 - 4 = 5x^2 + 12x - 25$$

On a alors $a = 5$, $b = 12$ et $c = -25$. Ce qui permet de calculer les valeurs de α et β. On trouve $\alpha = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}$ et $\beta = E(\alpha) = E\left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{161}{5}$.

La forme canonique de E est :

$$E(x) = 5\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{161}{5}$$

Résoudre une équation du 2^{nd} degré

Quand on ne sait pas !

- Revoir la résolution d'équation du 1^{er} degré du type $x + a = b$ ou $ax = b$, ainsi que d'équation du 2^{nd} degré de la forme $x^2 = a$.

- Vérifier si l'équation proposée peut se factoriser à l'aide d'un facteur commun ou d'une identité remarquable.

EXEMPLE 1 Résoudre $x^2 - 3x = 0$ revient à résoudre : $x(x - 3) = 0$.

EXEMPLE 2 Résoudre $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = 0$ revient à résoudre :

$$\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 = 0$$

- Dans le cas d'équations du 2^{nd} degré, incomplètes, du type $ax^2 + c = 0$, se ramener à une équation de la forme : $x^2 = -\frac{c}{a}$. On discute ensuite selon le signe de $-\frac{c}{a}$ de l'existence de solution.

EXEMPLE 3 Résoudre $2x^2 - 6 = 0$ revient à résoudre : $x^2 = 3$. Il y a donc 2 solutions qui sont : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

EXEMPLE 4 Résoudre $3x^2 + 5 = 0$ revient à résoudre : $x^2 = -\frac{5}{3}$. Or un carré ne pouvant être négatif, l'équation n'a pas de solution.

Que faire ?

- Dans un premier temps, on détermine les valeurs de a, b et c.

- Ensuite on calcule la valeur du discriminant.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- On identifie, selon le signe du discriminant, dans quel cas on se trouve :

> Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions distinctes : x_1 et x_2.
> Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une seule solution : x_0.
> Si $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution réelle.

- Enfin on donne la valeur des solutions de l'équation dans les deux cas où elles existent.

> Si $\Delta > 0$, alors les solutions sont : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
> Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une seule solution : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

EXEMPLE 5 Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$.

- On a : $a = 1, b = -5, c = 6$.
- On en déduit : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1$
- Comme le discriminant est positif, l'équation admet 2 solutions.
- On remplace les valeurs de a, b et Δ. On obtient alors :

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$$

Conseils

Pour utiliser les différentes formules, ne pas oublier de noter les valeurs des coefficients, a, b, c en faisant attention aux signes.

Il faut se rapporter à une équation du 2nd degré dont le second membre est nul :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Le calcul du discriminant n'est pas toujours nécessaire, en particulier dans le cas d'équations incomplètes.

Les formules précédentes ne sont valables que pour des équations du 2nd degré, pas pour des équations de degré supérieur.

Exemple traité

Résoudre l'équation suivante :

$$2x^2 + 5x - 7 = 0$$

SOLUTION

On repère les valeurs de *a, b* et *c* : $a = 2, b = 5, c = -7$.

- On calcule Δ : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 25 + 56 = 81$.
- $\Delta > 0$, donc l'équation admet 2 solutions.
- Les solutions de l'équation sont donc :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{81}}{2\times 2} = \frac{-5-9}{4} = -\frac{7}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-5+\sqrt{81}}{2\times 2} = \frac{-5+9}{4} = 1$$

On peut conclure que l'ensemble solution de l'équation est : $S = \left\{-\frac{7}{2};1\right\}$.

Exercices

Exercice 2.1 Résoudre $\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{1}{4} = 0$.

Exercice 2.2 Résoudre $x^2 - \sqrt{2}x - \frac{7}{2} = 0$.

Exercice 2.3 Résoudre $(x+3)(x-2) = 13x - 17$.

Exercice 2.4 Résoudre $(2x+9)(x-8) = -72$.

Exercice 2.5 Résoudre $4x = (2x+5)^2 + 9$.

Exercice 2.6 Résoudre $(x+6)^2 + 25 = 0$.

Exercice 2.7 Quelles sont les dimensions d'un rectangle de périmètre 37 m et d'aire $76{,}5625$ m^2 ?

Pour vous aider à démarrer

Exercice 2.1	Identifier les coefficients et calculer le discriminant.
Exercice 2.2	Identifier les coefficients et calculer le discriminant.
Exercice 2.3	Développer le membre de gauche et se ramener à une équation du 2^{nd} degré dont le membre de droite est nul.
Exercice 2.4	Développer le membre de gauche et se ramener à une équation du 2^{nd} degré dont le membre de droite est nul.
Exercice 2.5	Développer le membre de droite et se ramener à une équation du 2^{nd} degré dont le membre de droite est nul.
Exercice 2.6	Que peut-on dire d'une équation du type $a^2 + b^2 = 0$?
Exercice 2.7	Noter x_1 et x_2 les 2 dimensions du rectangle, écrire le système qu'elles vérifient puis en déduire l'équation du 2^{nd} degré dont elles sont solutions.

Solutions des exercices

Exercice 2.1

Comme l'équation est $\dfrac{2}{3}x^2 + x - \dfrac{1}{4} = 0$ alors $a = \dfrac{2}{3}$, $b = 1$, $c = -\dfrac{1}{4}$.

Le calcul du discriminant donne : $\Delta = 1^2 - 4 \times \dfrac{2}{3} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{3}$.

Comme $\Delta > 0$, il y a donc 2 solutions qui sont :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}}{2 \times \dfrac{2}{3}} = \frac{-3 - \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{4} = \frac{-3 - \sqrt{15}}{4}$$

et $$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}}{2 \times \dfrac{2}{3}} = \frac{-3 + \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{4} = \frac{-3 + \sqrt{15}}{4}$$