Je révise et je me perfectionne

I. Les nombres entiers naturels

L'*ensemble des nombres entiers naturels* est l'ensemble noté $\mathbb{N}$ tel que :

(i) 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$;

(ii) tout nombre n admet un successeur : $n+1$.

Conséquence 1.1

On en déduit immédiatement que :
(i) $\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\}.$;

(ii) $\mathbb{N}$ est infini (car tout nombre entier admet un successeur).

La notation $\mathbb{N}$ a été introduite par le mathématicien allemand Richard Dedekind en 1888.

II. Les nombres entiers relatifs

L'*ensemble des nombres entiers relatifs* est l'ensemble noté $\mathbb{Z}$. Il contient :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,\ldots\}\,.$$

On en déduit immédiatement les résultats suivants.

Proposition 1.2

(i) Tout nombre entier naturel est un entier relatif : on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on note :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}\,;$$

(ii) $\mathbb{Z}$ est infini (car $\mathbb{N}$ l'est).

La notation $\mathbb{Z}$ a été introduite par Nicolas Bourbaki au XX^{e} siècle. Le « Z » correspond à la première lettre du mot « Zahlen » qui signifie « nombre » en allemand.

III. Les nombres décimaux

L'ensemble des nombres décimaux est l'ensemble noté $\mathbb{D}$. Il contient les nombres pouvant s'écrire sous la forme du quotient d'un nombre entier relatif par une puissance de 10 :

$$\frac{a}{10^n} \text{ où } n \text{ est un entier naturel.}$$

On peut également s'assurer que le quotient est écrit sous forme irréductible et dans ce cas, un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme du quotient :

$$\frac{a}{2^n 5^m}$$

où a est un entier relatif non divisible par 2 ou 5, m et n sont des entiers naturels.

Une autre définition est : un nombre d est décimal si, et seulement si, il existe un entier naturel n tel que $10^n d$ est un entier relatif.

Ces trois définitions sont bien entendues équivalentes et on pourra utiliser l'une ou l'autre, en fonction de nos besoins.

Les nombres décimaux admettent une *écriture décimale* sous la forme d'*un nombre avec une virgule* qui sépare le nombre en deux parties. La *partie entière* est la partie située à gauche de la virgule. La *partie décimale* est située à droite de la virgule.

$$\underbrace{125478}_{\text{partie entière}} , \underbrace{324569}_{\text{partie décimale}}$$

Propriété 1.3

Si un nombre à une écriture décimale avec une partie décimale finie alors ce nombre est décimale.

Preuve

Considérons un nombre a avec une partie décimale finie comportant p chiffres après la virgule. Alors, le nombre $10^p a$ est un nombre entier relatif. On retrouve la troisième définition que l'on a donnée pour un nombre décimal.
Donc $a \in \mathbb{D}$.

Exemple 1.4

(1) $\dfrac{1}{2} \in \mathbb{D} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{5}{10}$.

(2) $-\dfrac{4}{25} \in \mathbb{D} : -\dfrac{4}{25} = \dfrac{-4}{5^2} = \dfrac{16}{100}$.

(3) $45,78 \in \mathbb{D}$: $45,78$ a deux chiffres après la virgule et, dans ce cas, $10^2 \times 45,78 = 4578$ et 4578 est un nombre entier. Donc $45,78 \in \mathbb{D}$.
On pouvait aussi écrire que $45,78 = \dfrac{4578}{100} = \dfrac{2289}{2 \times 5^2}$.

Conséquence 1.5

Tout nombre entier (relatifs ou naturel) est un nombre décimal.

Pour tout nombre entier relatif a, on a : $a = \dfrac{a}{1}$.

Cela signifie que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{D}$ ce qui se note :

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}.$$

IV. Les nombres rationnels

Les premières traces de nombres rationnels apparaissent dès l'époque babylonienne (entre 1900 et 1600 av. J.-C.). On en retrouve également chez les Égyptiens (2000 av. J.-C.) ainsi que chez les Romains.
Jusqu'à Pythagore (580-495 av. J.-C.), les Grecs avait une conception géométrique des nombres et considéraient les nombres comme des rapports de grandeurs géométriques (rapports de longueurs, d'aires). À cette époque, tous les nombres n'étaient que des nombres entiers ou des nombres rationnels. On ne connaissait rien d'autre (ou on refusait de concevoir d'autres types de nombres).

L'*ensemble des nombres rationnels* est l'ensemble noté $\mathbb{Q}$. Il contient tous les nombres pouvant s'écrire comme le quotient d'entiers relatifs premiers entre eux (leur seul diviseur commun positif est 1 ; cette notion sera revue dans le chapitre d'arithmétique).

Autrement dit, *un nombre est rationnel* si l'on peut l'écrire sous la forme d'une fraction :

$$\frac{a}{b}$$

où a et b sont des entiers relatifs avec $b \neq 0$ et tel que a et b sont premiers entre eux.
a est le *numérateur* de la fraction et b est son *dénominateur*.

Remarque 1.6

Le fait de choisir des entiers relatifs premiers entre eux permet de ne considérer que les nombres rationnels écrits sous la forme d'une fraction irréductible.

Conséquence 1.7

Les nombres décimaux sont des nombres rationnels et, par voie de conséquence, les nombres entiers naturels et relatifs aussi.
On peut donc dire que $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ et on note :

$$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}.$$

On en déduit également que $\mathbb{Q}$ est infini.

Exemple 1.8

(1) $5 = \dfrac{5}{1}$, $-7 = \dfrac{-7}{1}$, $45,37 = \dfrac{4537}{100}$ et $\dfrac{1}{3}$ sont des nombres rationnels : ils s'écrivent tous sous la forme d'un quotient d'entiers relatifs premiers entre eux.

(2) $\dfrac{1}{3}$ est un nombre rationnel non décimal.

Démontrons ce résultat par l'absurde : on va supposer que $\dfrac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Dans ce cas, il existe un nombre entier naturel n tel que $10^n \times \dfrac{1}{3}$ est un entier relatif.

Or, 3 ne divise pas 10 et ne divise donc pas 10^n.
Donc $10^n \times \dfrac{1}{3}$ n'est pas un entier relatif, ce qui contredit la supposition faite au départ.
Donc $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Propriété 1.9

Il existe des nombres rationnels qui ne sont pas des nombres décimaux.

Preuve

Dans l'exemple précédent, on a montré que $\dfrac{1}{3}$ n'était pas décimal.

Ce n'est pas le seul exemple. Pour s'en convaincre, on peut essayer de montrer que $\dfrac{1}{7}$ n'est pas non plus décimal tout comme $\dfrac{1}{9}$...

Focus 1.10

L'écriture décimale (avec une virgule) des nombres rationnels est :

- soit finie et dans ce cas, il est décimal ;
- soit infinie ; dans ce cas, la partie décimale contiendra une séquence de chiffres qui se répètera à l'infini comme dans l'exemple suivant.

Les nombres $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{10}$ sont des nombres rationnels avec une écriture décimale finie :

$$\frac{1}{4} = 0,25 \quad \text{et} \quad \frac{1}{10} = 0,1.$$

Prenons maintenant le nombre $\frac{1}{13}$. Son écriture décimale est alors :

$$0,0\underbrace{769230}_{}\underbrace{769230}_{}769\ldots$$

On remarque que la série de chiffres 769230 se répète deux fois. En fait, elle va se répéter à l'infini.

V. Les nombres réels

À l'époque de Pythagore (580-495 av. J.-C.), les nombres et la géométrie était liés. Les nombres étaient représentés par des longueurs ou des rapports de longueurs. On ne considérait que les nombres entiers et les nombres rationnels.

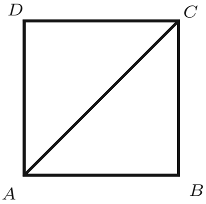
Pourtant, c'est à cette même époque que l'on découvrit qu'il existait des nombres qui n'étaient ni entiers, ni rationnels. Après avoir nié cette existence (la légende veut que l'on avait été jusqu'à assassiner un élève de l'école pythagoricienne pour avoir affirmé une telle énormité !), il fallut se rendre à l'évidence et accepter cet état de fait : il existe des nombres dit *irrationnels*.

L'un des premiers exemples présentés est le suivant.

On considère un carré $ABCD$ de côté de longueur 1 cm.

Calculons la longueur de sa diagonale.

Un brève étude du problème nous permet d'affirmer que le triangle ABC est rectangle en B et que l'on peut donc y appliquer le théorème de Pythagore qui nous donne :



$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

On trouve alors $AC^2 = 2$ puis $AC = \sqrt{2}$ cm.

Jusqu'ici, pas de problème. Le sujet se corse lorsque l'on se pose la question de la rationalité de $\sqrt{2}$.
Et il faut se rendre à l'évidence : ce n'est pas le cas.

Proposition 1.11

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Preuve

Ce résultat sera démontré en exercice dans le chapitre d'arithmétique.

Exemple 1.12

Il existe bien d'autres nombres irrationnels autres que $\sqrt{2}$.

(1) De manière générale, la racine carré de tout nombre premier est irrationnelle : $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, ... sont tous des nombres irrationnels.

(2) π est aussi un nombre irrationnel.

(3) Un nombre moins connu : *le nombre d'or* qui est le rapport entre la longueur de la diagonale du pentagone régulier par la longueur de son côté. On le note Φ et on montre que $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ce nombre est encore irrationnel.

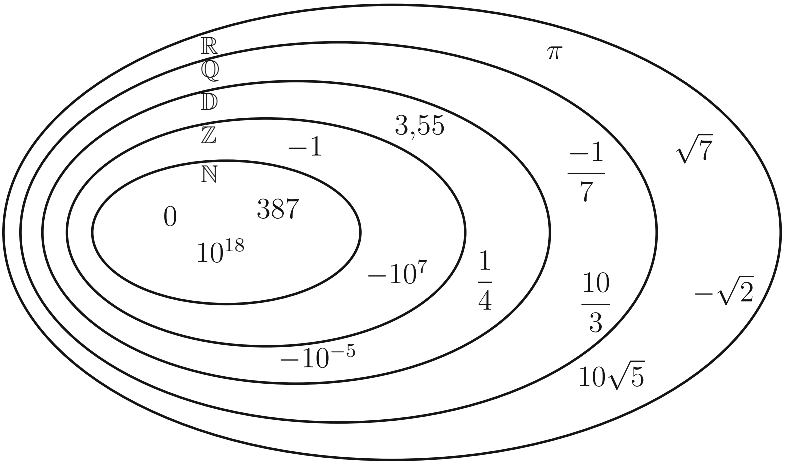
Si l'on considère maintenant tous les nombres, rationnels et irrationnels, on obtient l'*ensemble des nombres réels*. Il est noté $\mathbb{R}$.

Si l'on se réfère à tout ce qui a été fait précédemment, $\mathbb{R}$ est infini et contient tous les ensembles dont nous avons parlé. Et on a la propriété ci-dessous.

Propriété 1.13

On a la suite d'inclusions suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$


$\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$
$\mathbb{D}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{N}$
0
387
10^{18}
-1
-10^7
$3{,}55$
$\frac{1}{4}$
-10^{-5}
$\frac{-1}{7}$
$\frac{10}{3}$
π
$\sqrt{7}$
$-\sqrt{2}$
$10\sqrt{5}$

Je m'exerce et je fais la différence

Exercice 1.1

Compléter le tableau suivant en cochant la case donnant la nature de chaque nombre.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{2}$					
$3,14 - \pi$					
$\dfrac{7}{3}$					
$\dfrac{4,5}{0,9}$					
$\dfrac{49\pi^2}{14\pi}$					
$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$					

Exercice 1.2

On considère le nombre $N = \dfrac{1}{1{,}000\,001}$.

1) À l'aide d'une calculatrice de type collège (ou lycée), conjecturer la nature de N.

2) Démontrer que la conjecture émise à la question précédente est fausse.
On fera une démonstration par l'absurde.

Exercice 1.3

1) Quand on effectue la division de 28 par 27, on trouve 1,037 037 037 037... La division posée permet d'obtenir une écriture décimale périodique illimitée du quotient $\frac{28}{27}$. La période de cette écriture est composée de trois chiffres (ici 037) qui se répètent. La 5^{e} décimale est 3. Quelle est la 52^{e} décimale de $\frac{28}{27}$?

2) Quand on effectue la division de 19 par 13, on trouve 1,461 538 461 538 461 538... De combien de chiffres est composée la période ? Quelle est la 100^{e} décimale de $\frac{19}{13}$?

3) Quand on effectue la division de 9 533 par 270, on trouve 35,307 407 407 40... De combien de chiffres est composée la période ? Quelle est la 1 000^{e} décimale de $\frac{9\,533}{270}$?

Extrait des Olympiades mathématiques de 4^{e} 2017.

Exercice 1.4

Partie 1

On donne l'écriture décimale infinie suivante : $N = 3{,}123\,123\,123...$

1) Quelle semble être la nature de ce nombre ? Justifier la réponse.

2) On pose $n = N - 3$.

a) Démontrer que n est solution de l'équation $1000n - 123 = n$.

b) Résoudre cette équation et en déduire la valeur exacte de N.

c) Retrouve-t-on le conjecture faite à la question 1) ?

Partie 2

On donne l'écriture décimale infinie suivante : 10,195 489 548 95...

En s'inspirant des questions de la partie précédente, déterminer la valeur exacte de ce nombre.

Exercice 1.5

On considère la figure ci-dessous où $ABCD$ est un carré de côté de longueur 1. Le point E est le milieu de $[AB]$ et le cercle de centre E et de rayon $[EC]$ coupe $[EB)$ en F.