Chapitre 1 : Cinématique du point matériel

La cinématique du point matériel **décrit** le mouvement des corps indépendamment de ses causes. Ce mot a d'ailleurs la même racine grecque que cinéma, littéralement le mouvement. On définira dans un premier temps les concepts de temps et d'espace. Dans un deuxième temps, les grandeurs cinématiques vitesse et accélération seront exprimées dans les trois bases de projection usuelles. Enfin, nous terminerons par l'étude descriptive de quelques mouvements classiques simples.

1 Notions d'espace et de temps en mécanique

1.1 Solide et référentiel

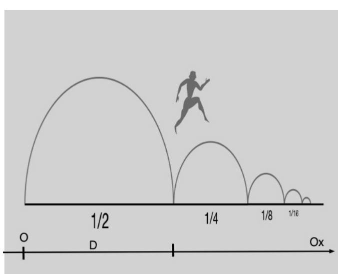
En mécanique classique, on appelle **solide** tout corps physique **indéformable**. Il ne présente donc aucune propriété élastique et ne se déforme pas lors de son mouvement. Une boule de pétanque, une brique et dans une moindre mesure un boomerang ou une planète sont assimilables à des solides.

On appelle **référentiel** tout solide de référence auquel est associé un **observateur fixe** muni d'une **horloge**. Le mouvement d'un solide dans un référentiel donné correspond toujours au point de vue de cet observateur. Le référentiel est par ailleurs muni d'une **base de projection** mathématique.
La Terre est le référentiel commun dans lequel nous vivons. Les mouvements que nous observons correspondent en général au point de vue d'un observateur fixe et lié à la Terre.
On peut toutefois envisager sur Terre d'autres référentiels : le compartiment d'un train ou la cabine d'un avion. Les mouvements seront alors étudiés du point de vue d'un observateur fixe dans ces moyens de transport. Certains référentiels doivent être connus : le référentiel géocentrique correspond au solide fictif constitué du centre C de la Terre et de trois axes orthogonaux de directions fixes. Le référentiel Terrestre ou Terre a un mouvement de rotation par rapport à ce référentiel avec pour axe de rotation l'axe Nord-Sud passant par C.

Il convient évidemment de ne pas confondre **référentiel** et **base de projection** associée. Le référentiel a une définition physique et matérielle même si elle est fictive comme dans le cas du référentiel géocentrique. La base de projection n'est que l'outil mathématique utile à la projection des vecteurs dans l'étude du mouvement et dans sa mathématisation. On pourra en particulier envisager une **base mobile** dans un référentiel donné sans que ce ne change rien à la nature du référentiel.

1.2 Postulat de continuité de l'espace et du temps

1.2.1 Paradoxe du Zénon d'Élée



Le paradoxe est le suivant : Achille fait la course avec une tortue qui avance à une vitesse constante V et se déplace lui-même à une vitesse deux fois plus importante. Magnanime, il laisse toutefois à la tortue une distance d'avance D. Pour rattraper la première position de la tortue, il lui faut donc tout d'abord une première durée : $T_1 = D/2V$.
Cependant quand il arrive à cette position, la tortue a avancé de $D_1 = V.D/2V$ c'est-à-dire d'une distance de $D/2$! Il faudra donc à nouveau une durée $T_2 = D/4V$ pour rattraper la tortue mais pendant cette durée celle-ci aura alors avancé de $D_2 = V.D/4V = D/4$! On peut ainsi réitérer le processus à l'infini et en déduire qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue. Curieux paradoxe !

1.2.2 Levée du paradoxe

On peut bien entendu lever ce paradoxe de façon moderne en notant que la somme T des durées pour rattraper la tortue comprend certes un nombre infini de termes mais possède malgré tout une limite finie. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1/2$.

$$T = \sum_{1}^{\infty} T_i = \frac{D}{2V}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^k} \text{ soit : } T = \frac{D}{2V}\frac{1}{1-1/2} \text{ soit encore : } T = \frac{D}{V}$$

En réalité, le paradoxe a une portée philosophique bien plus subtile qu'un simple problème mathématique de convergence. Toute mesure de grandeurs cinématiques comme celle de la position ou de la vitesse d'un solide est toujours une mesure **discrète** constituée d'une **suite** de nombres.

C'est le cas par exemple des positions successives d'Achille formant une **suite**. On postule malgré tout pour lever le paradoxe, qu'en physique classique, un solide parcourt son trajet de manière **continue** c'est-à-dire qu'il y a continuité de l'espace et du temps dans l'étude du mouvement.

- C'est ce postulat de continuité de l'espace et du temps qui permet maintenant d'écrire les mouvements respectifs d'Achille (A) et de la tortue (T) sous la forme de **lois horaires** qui sont des **fonctions continues** du temps bien que les grandeurs physiques position et vitesse soient toujours mesurées de façon discrète.

$$\text{On a alors avec les hypothèses de continuité } : (x_A(t) = 2Vt \,; x_T(t) = D + Vt)$$

Achille rencontre la tortue à la date $\boldsymbol{T}$ telle que : $2VT = D + VT$ soit $T = D/V$!

- Le temps s'écoule selon ce postulat de manière continue et irréversible dans le même sens. Impalpable, son écoulement a été originellement mesuré par l'étude de phénomènes cycliques. Ainsi, les saisons, les lunaisons, le jour solaire ont à une époque lointaine servi d'étalon de temps.
- L'unité de temps du Système International est la seconde définie depuis 1967 comme la durée de 9 192 631 770 transitions entre deux niveaux hyperfins de l'atome de Césium 133. Cette définition permet de définir aujourd'hui des durées avec une précision théorique de 10^{-12}.

1.3 Postulats de la mécanique classique

Nous nous intéresserons dans ce cours uniquement au mouvement dans l'espace de solides indéformables. Rappelons à nouveau que ce sont des corps matériels sans propriétés élastiques pour lesquels la distance entre deux points quelconques du corps est invariante au cours du temps.
Le mouvement du solide est étudié dans un référentiel constitué d'un autre solide auquel est associé un observateur fixe muni d'une horloge. Le référentiel est également muni d'une base de projection.

On postule alors les éléments suivants :

- **L'espace et le temps forment chacun un continuum**. On repère la position d'un point M quelconque du solide à l'aide d'un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ où O est un point fixe du référentiel d'étude pris comme origine. La position du point M évolue en fonction du temps qui s'écoule. A un instant donné, le point $M(t)$ coïncide avec un **point fixe** de **l'espace physique du référentiel.** Ce point est appelé **point coïncidant** du mouvement et noté M_C.

- L'unité de longueur du système international est le mètre (m) défini comme la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide en une fraction $1/299\,792\,458$ de seconde.

- On peut associer au référentiel une base de projection soit rigide c'est-à-dire fixe et appelée alors base cartésienne soit mobile et étant dans ce cas attachée au point en mouvement. **L'espace obéit alors aux lois de la géométrie Euclidienne**.

- La position d'un point du solide à un instant t constitue un **événement physique**. L'espace géométrique est de dimension 3, l'espace des temps constitue un espace supplémentaire et distinct de dimension 1. En physique classique**, la durée séparant deux événements ne dépend pas du référentiel d'étude**. Le temps et l'espace sont disjoints. On parle du caractère universel du temps.

- **Enfin, on peut en théorie mesurer simultanément et avec une infinie précision la position et la vitesse d'un point**. Seule la précision des appareils de mesure s'y oppose mais aucune contrainte théorique physique ne l'empêche.

1.4 Limites de la physique classique

La mécanique classique ou Newtonienne a un champ d'application relativement large. Elle est largement suffisante dans la description des machines motrices du quotidien : train, voiture ou avion.

Toutefois le XX^{e} siècle a mis en évidence des limites qui ont été chronologiquement les suivantes :

- La compatibilité des équations de l'électromagnétisme de Maxwell avec la mécanique a amené à une refondation des concepts de temps et d'espace dans le cadre de la **relativité restreinte**.
- Un événement se situe en relativité dans un cadre spatial et temporel de **dimension 4** et non plus $\{3(\text{espace}) + 1(\text{temps})\}$ distincts comme en mécanique classique. En particulier, si un référentiel est en translation rectiligne à la vitesse v par rapport à un autre qui est fixe et munis tous deux d'horloges synchronisées, la durée séparant deux événements colocaux (se produisant au même point) dans le premier référentiel dit absolu n'est pas égale à la durée séparant ces deux événements dans le référentiel mobile. La première durée est appelée durée propre et la seconde durée impropre.

On montre en relativité restreinte que :

$$\Delta t_{impropre} = \Delta t_{propre}/\sqrt{1-(v/c)^2} \text{ où } c \text{ est la célérité de la lumière dans le vide.}$$

C'est le phénomène de dilatation des durées. Pour un avion se déplacement à une vitesse de l'ordre de $v \approx 300\, m.s^{-1}$, la correction est de l'ordre de : $(v/c)^2 \approx 10^{-12}$. Elle est donc tout à fait inappréciable pour les horloges usuelles. Tant que la vitesse des objets physiques étudiés reste très en deçà de la vitesse de la lumière, le paradigme classique reste un très bon paradigme.

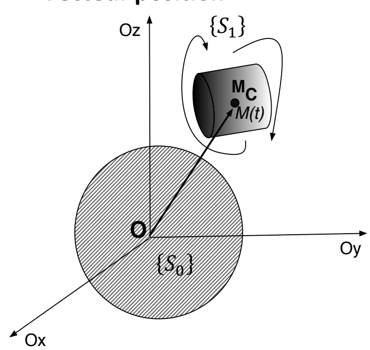
- Le caractère euclidien de l'espace est remis en cause en 1916 dans le cadre de la **relativité générale.** Le champ gravitationnel y est vu comme une déformation de l'espace-temps induit par les masses.

Il s'agit alors d'une refondation complète de la mécanique newtonienne. Là aussi, les corrections sont négligeables dans les applications usuelles de la mécanique des systèmes.

- Enfin en 1926, la **mécanique quantique** s'impose. On y apprend alors qu'il n'est pas possible de mesurer **simultanément** et avec une **infinie précision** vitesse et position d'un point au-delà bien entendu de toutes considérations pratiques sur les appareils de mesure. La mécanique classique ne s'applique donc pas au niveau de l'infiniment petit.

2 Grandeurs cinématiques associées au mouvement d'un point : position, vitesse et accélération

2.1 Vecteur position



On considère désormais un solide $\{S_1\}$ en mouvement par rapport à un référentiel donné $\{S_0\}$ qui est le solide de référence auquel est attaché un observateur fixe muni d'une horloge. L'observateur est situé au point O du référentiel pris comme origine de l'espace affine. On considère alors un point particulier $M(t)$ du solide $\{S_1\}$ que l'on suit dans son mouvement. A un instant t, il est confondu avec le point M_c de l'espace physique appelé point coïncidant.

Le mouvement du point mobile du solide est repéré dans ce référentiel par le vecteur **position** $\overrightarrow{OM(t)}$. Ce vecteur est naturellement un vecteur lié à O et il donne la position du point M **par rapport au point fixe** O du référentiel d'étude auquel est associé une base cartésienne $(Oxyz)$ orthonormée.

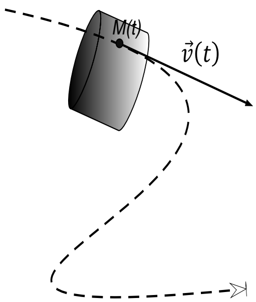
2.2 Vecteur vitesse d'un point d'un solide mobile par rapport à un référentiel donné

2.2.1 Définition

On appelle vecteur vitesse dans le référentiel $\{S_0\}$, d'un point du solide le vecteur lié attaché au point mobile M et d'expression mathématique :

$$\vec{v}(t) = \left[d\overrightarrow{OM}/dt\right]_{\{S_0\}}.\text{ L'indice } \{S_0\} \text{ indique le point de vue de l'observateur fixe lié à } \{S_0\}.$$

2.2.2 Propriétés



- Le vecteur vitesse est par construction tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement. Il s'exprime en mètres par seconde. Sa norme s'appelle la « vitesse » dans le langage courant.
- On dit que le point M a un mouvement **uniforme** si la **norme** du vecteur vitesse est constante au cours du temps.
- L'ensemble des positions du point $M(t)$ au cours du temps constitue la trajectoire de ce point dans le référentiel d'étude.

- On appelle vecteur tangent à la trajectoire le vecteur unitaire orienté dans le sens du mouvement qui a trivialement pour expression au point M : $\hat{\tau}(M) = \vec{v}(t)/\|\vec{v}(t)\|$.

2.3 Accélération d'un point d'un solide mobile

On appelle vecteur accélération d'un point du solide noté généralement $\vec{a}(t)$ ou $\vec{\gamma}(t)$,calculé dans le référentiel $\{S_0\}$, le vecteur lié attaché au point mobile $M(t)$ et défini par :

$$\vec{a}(t) = [d\vec{v}/dt]_{\{S_0\}} \text{ Elle s'exprime en } (m.s^{-1})\, s^{-1} = ms^{-2}$$

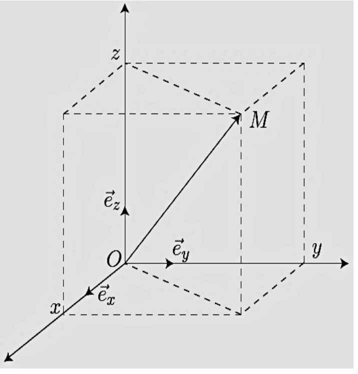
- On appelle **accélération tangentielle** du mouvement, la composante de l'accélération selon le vecteur tangent : $a_\tau = \vec{a}(t)\,.\hat{\tau}$
- Il est facile de montrer que dans un **mouvement uniforme**, **l'accélération est soit nulle soit normale à la vitesse** et donc aussi normale à la trajectoire. L'accélération tangentielle y est donc nulle.
- **Démonstration :** rappelons tout d'abord qu'un produit scalaire ou un produit vectoriel se dérivent comme des produits de fonctions.

$$\text{On a donc : } \begin{cases} \dfrac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt} = \dfrac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\dfrac{d\vec{B}}{dt} \\ \dfrac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \dfrac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \dfrac{d\vec{B}}{dt} \end{cases}$$

Comme $v^2 = \vec{v}(t).\vec{v}(t)$ est constante, on en déduit en dérivant ce produit scalaire par rapport au temps que : $2\vec{v}(t).d\vec{v}(t)/dt = 0$. Il en résulte que soit l'accélération est **nulle** et l'on a alors un mouvement **rectiligne** uniforme soit elle est orthogonale à la vitesse et donc aussi à la trajectoire en tout point. Dans un mouvement uniforme, l'accélération est donc toujours normale au trajet ou nulle.

3 Expression de la vitesse et de l'accélération dans les bases classiques de projection

3.1 Cas des coordonnées cartésiennes



La base de projection cartésienne est une base orthonormée directe formée de trois vecteurs de base $[\hat{e}_x, \hat{e}_x, \hat{e}_x]$ unitaires liés au solide $\{S_0\}$ qui constitue le référentiel d'étude. Ces trois vecteurs de base sont donc **fixes** dans ce référentiel.

Le point O est le centre du repère de l'espace affine associé. Le vecteur position d'un point $M(t)$ d'un solide par rapport au point O origine du repère a donc pour expression :

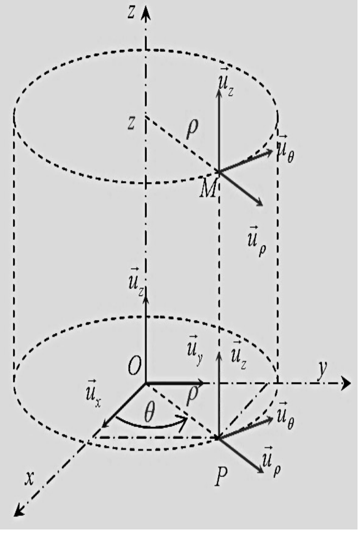
$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\hat{e}_x + y\,(t)\,\hat{e}_y + z\,(t)\,\hat{e}_z$$

On en déduit immédiatement les expressions de la vitesse et de l'accélération dans cette base :

$$\vec{v}(t) : \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}(t) : \begin{pmatrix} d^2x/dt^2 \\ d^2y/dt^2 \\ d^2z/dt^2 \end{pmatrix}$$

Vitesse en coordonnées cartésiennes	Accélération en coordonnées cartésiennes
$\vec{v}(t) = \dfrac{dx}{dt}\hat{e}_x + \dfrac{dy}{dt}\hat{e}_y + \dfrac{dz}{dt}\hat{e}_z$	$\vec{a}(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{e}_x + \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{e}_y + \dfrac{d^2z}{dt^2}\hat{e}_z$

3.2 Cas des coordonnées cylindriques



La base de projection cylindrique est une base orthonormée directe formée de trois vecteurs de base $[\hat{u}_\rho(\theta), \hat{u}_\theta(\theta), \hat{u}_z]$ unitaires mais liés au point $M(t)$ en mouvement. Ces trois vecteurs de base sont donc mobiles dans le référentiel d'étude.

Le point O est toujours le centre du repère de l'espace affine associé. Le vecteur position d'un point M d'un solide par rapport au point O origine du repère a donc pour expression :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\hat{u}_\rho(\theta) + z(t)\hat{u}_z$$

On prendra garde au fait que si l'angle θ n'apparaît pas explicitement dans les coordonnées de la base locale, il est impératif de le connaître pour positionner $\hat{u}_\rho(\theta)$.

On peut exprimer cette base dans la base cartésienne associée $\left[\hat{\boldsymbol{u}}_x, \hat{\boldsymbol{u}}_y, \hat{\boldsymbol{u}}_z\right]$

$$\text{On a trivialement : } \begin{cases} \hat{u}_\rho(\theta) = cos\theta\, \hat{u}_x + sin\theta\, \hat{u}_y \\ \hat{u}_\theta(\theta) = -sin\theta\, \hat{u}_x + cos\theta\, \hat{u}_y \end{cases}$$

- On en déduit immédiatement les dérivées de ces vecteurs de base considérés comme des fonctions vectorielles de la variable θ.

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{u}_\rho(\theta)}{d\theta} = -sin\theta\, \hat{u}_x + cos\theta\, \hat{u}_y = \hat{u}_\theta(\theta) \\ \dfrac{d\hat{u}_\theta(\theta)}{d\theta} = -cos\theta\, \hat{u}_x - sin\theta\, \hat{u}_y = -\hat{u}_\rho(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d\hat{u}_\rho(t)}{dt} = \dfrac{d\hat{u}_\rho(\theta)}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta(\theta) \\ \dfrac{d\hat{u}_\theta(t)}{dt} = \dfrac{d\hat{u}_\theta(\theta)}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{d\theta}{dt}\hat{u}_\rho(\theta) \end{cases}$$

- On peut maintenant en déduire l'expression de la vitesse et de l'accélération dans cette base mobile lié au point $M(t)$.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{u}_\rho(t) + \rho\frac{d\hat{u}_\rho(t)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{u}_\rho(t) + \rho\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta(t) + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\rho}{dt^2}\hat{u}_\rho(t) + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta(t) + \left[\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{u}_\theta(t) - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\hat{u}_\rho(t) + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z$$

$$\text{soit encore : } \vec{a}(t) = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_\rho(t) + \left[\frac{1}{\rho}\frac{d\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}\right]\hat{u}_\theta(t) + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z$$

Vitesse en coordonnées cylindriques	**Accélération en coordonnées cylindriques**
$\vec{v}(t) = \frac{d\rho}{dt}\hat{u}_\rho(t) + \rho\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta(t) + \frac{dz}{dt}\hat{u}_z$	$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \\ \left[\frac{1}{\rho}\frac{d\left(\rho^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}\right] \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}_{[\hat{u}_\rho, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z]}$

3.3 Cas du mouvement plan et base de Frenêt

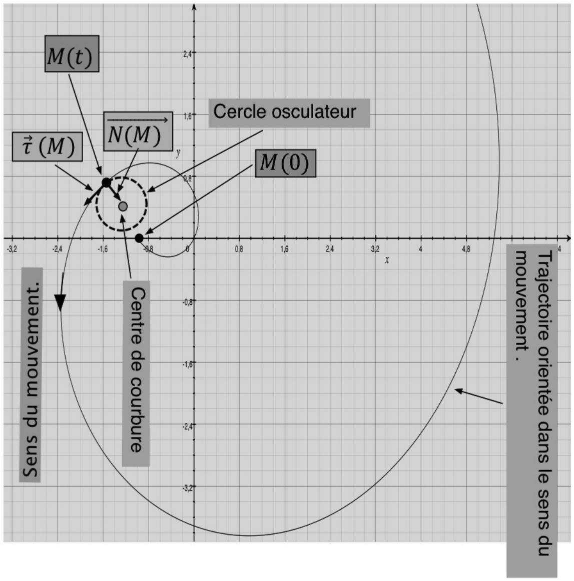
- La base de Frenêt est une base locale attachée au point $M(t)$. Elle est constituée au point M du vecteur **unitaire** tangent $\vec{\tau}\,(M)$ à la trajectoire et du vecteur **unitaire** normal $\widehat{N}(M)$pointant dans le sens de la concavité de la trajectoire décrite.

- On appelle abscisse curviligne la longueur de l'arc $M(0)M(t)$ où $M(0)$ est pris comme point origine du mouvement. Cette longueur qui est positive par définition est généralement notée $s(t)$.

Entre deux instants infiniment proches, le point mobile $\boldsymbol{M}$ se déplace de la quantité vectorielle :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}\,\vec{\tau}(M) \text{ or } M(t)M(t+dt) = ds \Longrightarrow$$

$$d\overrightarrow{OM} = ds\,\vec{\tau}(M) \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}(M) = v(t)\,\vec{\tau}(M)$$



On appelle cercle osculateur le cercle passant en M et tangent à la trajectoire passant au plus près de la courbe. Son rayon $R_c(M)$ est appelé rayon de courbure de la trajectoire au point M.

Si l'on prend alors comme origine d'un repère local le centre C de ce cercle, le point M tourne, entre deux instants infiniment proches, de $d\theta$ sur ce cercle.

Par analogie avec la base cylindrique, on a alors : $d\vec{\tau}(M)/d\theta = \widehat{N}(M)$. Le vecteur unitaire $\widehat{N}(M)$ dirigé vers le centre de courbure est appelé normale à la trajectoire.

Le point M se déplace d'une quantité $ds = R_c(M)d\theta$ de sorte que :

$$d\vec{\tau}(M)/ds = d\vec{\tau}(M)/d\theta\,.\,d\theta/ds = \widehat{N}(M)/R_c(M)$$

On en déduit alors l'expression de l'accélération dans la base de projection $\left(M(t), \vec{\tau}(M), \widehat{N}(M)\right)$ appelée base intrinsèque :

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}(M) + v(t)\frac{d\vec{\tau}(M)}{ds}\frac{ds}{dt} \Longrightarrow \vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}(M) + \frac{v^2(t)}{R_c(M)}\widehat{N}(M) \text{ puisque : } v(t) = \frac{ds}{dt}$$

Vitesse en coordonnées intrinsèques	**Accélération en coordonnées intrinsèques**
$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}(M) = v(t)\vec{\tau}(M)$	$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}(M) + \frac{v^2(t)}{R_c(M)}\widehat{N}(M)$

Accélération tangentielle	**Accélération normale**
$\overrightarrow{a_\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}(M)$	$\overrightarrow{a_N} = \frac{v^2(t)}{R_c(M)}\widehat{N}(M)$

On retrouve que dans un mouvement uniforme, l'accélération est normale au mouvement et d'autant plus intense que le rayon de courbure est faible, c'est-à-dire que l'on s'éloigne de la ligne droite. C'est par exemple l'accélération d'un point matériel dans un virage parcouru à vitesse de norme constante.