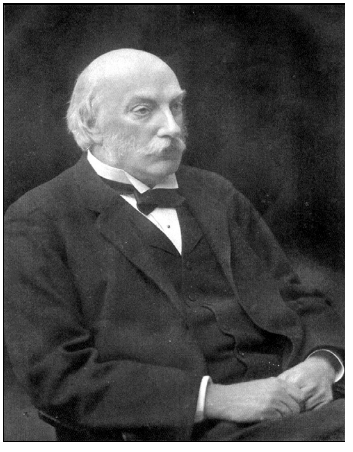
Chapitre 1
Compléments d'algèbre linéaire

Le physicien et mathématicien anglais John William **Strutt**, baron de **Rayleigh**, élabore une théorie mathématique de l'optique et des systèmes vibratoires. Par la suite il s'intéresse à tous les domaines de la physique. En travaillant sur la structure de la matière, il découvre un gaz rare, l'argon, ce qui lui vaut le prix Nobel en 1907. Pour étayer ses différents travaux, il développe des méthodes mathématiques dans le cadre de l'analyse vectorielle au sein de l'école de physique mathématique de Cambridge.



John Rayleigh
1842-1919

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Connaître la définition d'une matrice de passage et les formules de changements de bases.

▷ Connaître la définition de la trace d'une matrice.

▷ Connaître la définition de deux matrices semblables.

▷ Connaître la notion de sous-espace stable par un endomorphisme.

■ Et plus si affinités

▷ Savoir découvrir des propriétés d'un endomorphisme laissant stable des sous-espaces donnés.

Résumé de cours

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La lettre n désigne un entier naturel non nul et E est un espace vectoriel de dimension n.

Changement de bases

Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.1. — On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une famille de p vecteurs de E ($p \in \mathbb{N}^*$). On appelle *matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$*, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne sont les coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 1.1. — Soit x un vecteur de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées du vecteur x dans une base $\mathcal{B}$ de E. La matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Propriété 1.1. — Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de n vecteurs de E. Si la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible, alors $\mathcal{F}$ est une base de E.

⇨ **Méthode 1.1. Comment montrer, matriciellement, qu'une famille est une base ?**

Matrice de passage

Définition 1.2. — On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Propriété 1.2. — Pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Formules de changement de bases

Théorème 1.1. — Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si, pour tout vecteur x de E, on note X (respectivement X') la matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$), alors on a : $X = PX'$.

Théorème 1.2. — Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si, pour tout endomorphisme f de E, on note A (respectivement A') la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{B}'$), alors on a : $A' = P^{-1}AP$.

❑ Matrices semblables

Définition 1.3. — Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, inversible, et telle que : $A' = P^{-1}AP$.

Théorème 1.3. — Deux matrices carrées sont semblables si, et seulement si, elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

■ Trace d'une matrice carrée

❑ Définition

Définition 1.4. — Pour toute matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \le i, j \le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *trace* de A, le scalaire noté $\mathrm{Tr}(A)$, égal à la somme des éléments diagonaux de A. On a donc : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Remarque 1.2. — La trace d'une matrice n'a de sens que si la matrice est carrée.

❑ Linéarité de la trace

Propriété 1.3. — L'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe sa trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Autrement dit :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \text{ et } \mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{Tr}(A)$$

❑ Invariance de la trace par similitude

Propriété 1.4. — Deux matrices semblables ont même trace. Autrement dit :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right)$$

■ Sous-espaces stables

Définition 1.5. — Soit F un sous-espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E. On dit que F est *stable* par f si : $f(F) \subset F$.

⇨ **Méthode 1.2. Comment montrer, avec la définition, qu'un sous-espace est stable ?**
⇨ **Méthode 1.3. Comment montrer qu'un sous-espace *F* est stable lorsque *F* est défini par une famille génératrice ?**

Remarque 1.3. — Autrement dit, F est stable par f si : $\forall x \in F,\ f(x) \in F$.

Méthodes

Matrice de passage

Méthode 1.1. Comment montrer, matriciellement, qu'une famille est une base ?

Soit un espace vectoriel E de base $\mathcal{B}=\left(e_1,\ldots,e_n\right)$. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}=\left(f_1,\ldots,f_n\right)$ de n vecteurs de E est une base de E, on montre que la matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ est inversible.
Cette matrice est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{F}$.

➪ **Exercices 1.1, 1.2**

Exemple. Soit $\mathcal{B}=\left(e_1,e_2,e_3\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On donne $u=\left(1,0,0\right)$, $v=\left(-1,2,-2\right)$ et $w=\left(3,-1,2\right)$. Montrer que la famille $\left(u,v,w\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a : $u=e_1$, $v=-e_1+2e_2-2e_3$ et $w=3e_1-e_2+2e_3$. La matrice de la famille $\left(u,v,w\right)$ dans $\mathcal{B}$ est donc : $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$ qui admet pour réduite de Gauss la matrice $\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (on a effectué dans P l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3+L_2$). Cette matrice est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls : P est donc inversible et $\left(u,v,w\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Sous-espaces stables

Méthode 1.2. Comment montrer, avec la définition, qu'un sous-espace est stable ?

Soit f un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E. Pour montrer que F est stable par f, on montre que : $\forall x \in F$, $f\left(x\right) \in F$.

➪ **Exercice 1.6**

Exemple. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f\right)$ est stable par f.

Pour tout vecteur x de $\operatorname{Ker}(f)$, on a : $f(x)=0$. En appliquant *f*, on obtient $f(f(x))=f(0)=0$ et ainsi : $f(x)\in\operatorname{Ker}(f)$. En conclusion, $\operatorname{Ker}(f)$ est stable par *f*.

❑ Méthode 1.3. Comment montrer qu'un sous-espace *F* est stable lorsque *F* est défini par une famille génératrice ?

Soit f un endomorphisme de E et $e_1,\ldots,e_p$ des vecteurs de E. Pour montrer que $F=\operatorname{Vect}(e_1,\ldots,e_p)$ est stable par *f*, on montre que : $\forall i\in[\![1,p]\!],\ f(e_i)\in F$.

⇨ **Exercices 1.5, 1.6**

Exemple. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}7&3&-4\\-6&-2&5\\4&2&-1\end{pmatrix}$. Soit $e_1=(1,0,2)$ et $e_2=(0,1,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On pose $F=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$. Montrer que F est stable par *f*. On a :

$A\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ donc $f(e_1)=(-1,4,2)=-e_1+4e_2$. On en déduit que $f(e_1)$ est élément de F.

$A\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ donc $f(e_2)=(-1,3,1)=-e_1+3e_2$. On en déduit que $f(e_2)$ est élément de F.

En conclusion : F est stable par *f*.

En effet, comme la famille (e_1,e_2) est génératrice de F, tout vecteur x de F s'écrit :

$$x=x_1e_1+x_2e_2$$

Par linéarité de *f*, on a :

$$f(x)=x_1f(e_1)+x_2f(e_2)$$

Ainsi, comme on vient de montrer que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont éléments de F, $f(x)$ appartient bien à F, comme combinaison linéaire de vecteurs de F.

Vrai/Faux

		Vrai	Faux
1.	Soit A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est semblable à B et B est semblable à C, alors A est semblable à C.	☐	☐
2.	Toute matrice semblable à une matrice scalaire est scalaire.	☐	☐
3.	Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$	☐	☐
4.	L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace égale à 1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.	☐	☐
5.	L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.	☐	☐
6.	Toute matrice de trace nulle est non inversible.	☐	☐
7.	Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par un endomorphisme f de E. Pour tout entier naturel n, F est stable par f^n.	☐	☐
8.	Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent ($f \circ g = g \circ f$), alors $\mathrm{Ker}(f)$ est stable par g.	☐	☐
9.	Si f et g sont deux endomorphismes de E qui commutent ($f \circ g = g \circ f$), alors $\mathrm{Im}(f)$ est stable par g.	☐	☐
10.	Soit f un endomorphisme de E. La somme de deux sous-espaces de E stables par f est stable par f.	☐	☐

■■ Énoncé des exercices

❑ **Exercice 1.1.** — Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on donne : $f_1=(1,1,2,1)$, $f_2=(1,-1,0,1)$, $f_3=(0,0,-1,1)$ et $f_4=(1,2,2,0)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. a) Écrire la matrice P de la famille $\mathcal{B}'=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ dans $\mathcal{B}$.

b) En déduire que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

2. a) Déterminer P^{-1}.

b) En déduire les coordonnées du vecteur $x=(-1,1,1,2)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

❑ **Exercice 1.2.** — Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on donne :

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}\text{ et } D=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. a) Écrire la matrice P de la famille $\mathcal{B}'=(A,B,C,D)$ dans $\mathcal{B}$.

b) En déduire que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}6&4\\0&4\end{pmatrix}$.

a) Déterminer P^{-1}.

b) En déduire les coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}'$.

❑ **Exercice 1.3.** — Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on a : $\mathrm{Tr}(MN)=\mathrm{Tr}(NM)$

2. a) En déduire la preuve de la propriété du cours : deux matrices semblables ont même trace.

b) Montrer qu'il n'existe aucun couple (A,B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB-BA=I$.

❑ **Exercice 1.4.** — Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note Tr l'application qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace. On rappelle que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\mathrm{Im}\,\mathrm{Tr}=\mathbb{R}$.

2. En déduire la dimension de Ker Tr.

3. Établir que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=\mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}\oplus\mathrm{Vect}(I)$.

D'après EDHEC