Chapitre 0

RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Montrer…, Démontrer…, Justifier… des mots qui ont pris du sens durant vos quatre années de collège. En Seconde, les connaissances mathématiques acquises et que vous allez encore acquérir, vont de plus en plus interagir entre elles. Ce qui les lie, c'est la logique. Et tout comme les calculs avec les nombres, du vocabulaire et des règles entrent en jeu. Nous allons dans une première partie de ce chapitre, identifier ces règles, plus ou moins entrevues (principalement grâce à la géométrie). Néanmoins, il vous faudra un bon moment pour « digérer » toutes ces notions.

Puis dans une seconde partie, nous allons parler d'algorithmique et de programmation avec le langage Python. On verra la rédaction attendue pour le baccalauréat ainsi que toutes les instructions informatiques appliquées aux mathématiques afin d'appréhender au mieux ce nouvel exercice.

1 QUANTIFICATEURS ET CONNECTEURS

Les deux symboles que l'on va voir dans cette partie ne sont pas exigibles pour la Seconde mais vous les aurez et les utiliserez sûrement dans votre parcours scolaire.

Définition 1.1

Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**. Il signifie « il existe (au moins) ».

EXEMPLES

- Il existe une solution de l'équation : $x+4=0$.
- Il existe une solution de l'équation : $x^2=4$. Vous savez qu'il en existe exactement deux, qui sont -2 et 2 .

REMARQUES

- Le sens mathématique de « il existe » est bien « il existe au moins ». Il peut exister une, voire plusieurs possibilités comme l'indique l'exemple précédent.
- Ainsi, pour démontrer une propriété, un théorème, ... qui utilise « il existe », il suffira de trouver un élément qui vérifie la condition demandée.

Définition 1.2

Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**. Il signifie « pour tout », « quelque soit ».

EXEMPLES

- Quelque soit le triangle ABC rectangle en A, on a :
  $AB^2+AC^2=BC^2$
- Si je considère un cercle C de centre O et de rayon $2cm$. On peut dire : Pour tout point M du cercle C , $OM=2cm$.

REMARQUE

Le sens mathématique de « pour tout » est très fort ; cela demande un raisonnement qui établit la validité de la conclusion pour toutes les valeurs possibles.

Définitions 1.3

- Le **connecteur** « **et** » relie deux phrases et signifie que la présence des deux est obligatoire.
- Le **connecteur** « **ou** » relie deux phrases et signifie que la présence de l'une des deux est suffisante.
- Le **connecteur** « **non** » ne traite qu'une seule phrase et signifie le contraire de cette phrase.

EXEMPLES

→ Si un quadrilatère a ses diagonales <u>qui se coupent en leur milieu</u> **et** <u>de même longueur</u> alors c'est un rectangle. Il faut absolument les deux pour que ce soit un rectangle sinon on ne peut pas utiliser cette propriété.

→ Si $x^2=4$ alors $x=-2$ **ou** $x=2$ (soit l'une, soit l'autre).

→ « Si $A\times B=0$ alors $A=0$ **ou** $B=0$ » que vous connaissez comme : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. On retrouve le connecteur ou. Ici on peut avoir soit A qui vaut 0, soit B qui vaut 0, soit les deux car 0×0 est bien égal à 0.

REMARQUE

Le connecteur « ou » a un sens différent du langage courant. En français, on exclut souvent la possibilité d'avoir « les deux » en même temps : fromage ou dessert, vrai ou faux, … Il peut aussi signifier une condition : « finis tes épinards ou tu seras puni !! ».

EXEMPLE

Le connecteur « non » semble simple mais ne l'est pas. Par exemple, prenons une boîte de chocolats qui peut contenir soit des chocolats noirs, soit des chocolats blancs.

Réfléchissez deux minutes :

Quel est le contraire de « tous les chocolats sont des chocolats noirs » ?

Vous avez envie de dire « tous les chocolats ne sont pas noirs ».

Cela est faux car cela voudrait dire « que tous les chocolats sont blancs » alors qu'en fait ils ne sont pas tous noirs, donc il existe au moins un (ou plusieurs) chocolat blanc. D'où :

Propriété 1.1

- La négation de « pour tout élément, la condition est… » est « il existe un élément tel que la condition n'est pas… ».
- La négation de « il existe un élément tel que la condition est… » est « pour tout élément, la condition n'est pas… »

EXEMPLES

→ Le contraire de « Tous les chocolats sont noirs » est « Il existe un chocolat blanc (au moins un) ».

→ Le contraire de « Il existe un chocolat noir » est « Tous les chocolats sont blancs ».

2 PROPOSITION CONDITIONNELLE

Rappelons le célèbre théorème de Pythagore que vous connaissez.

Théorème 2.1

Soit trois points A, B et C du plan.

Si le triangle ABC est rectangle en A **alors** on a : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Il y a encore beaucoup de choses à dire malgré tout ce que vous avez vu sur ce théorème.

Ainsi, pour que la proposition « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » soit vraie, il suffit que la proposition « le triangle ABC est rectangle en A » soit vraie. Donc la proposition « le triangle ABC est rectangle en A » est une condition suffisante.

Dans un autre sens, pour que la proposition « le triangle ABC est rectangle en A » soit vraie, il faut que la proposition « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » soit vraie. Donc la proposition « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » est une condition nécessaire. Il est nécessaire de l'avoir car sinon le triangle n'est pas rectangle.

Résumons, en notant P et Q de telles propositions de théorème.

Définition 2.1

Avec la propriété : « Si P alors Q », on dit que P est une **condition suffisante** et Q une **condition nécessaire**.

Définition 2.2

Considérons la propriété : « Si P alors Q ». On dit que « Si Q alors P » est la **propriété réciproque** de la première et la première est alors appelée la **proposition directe**.

REMARQUE

Si une propriété est vraie, sa réciproque, elle, ne l'est pas toujours.

EXEMPLES

- La réciproque du théorème de Pythagore est :

  « Si on a : $AB^2+AC^2=BC^2$ **alors** le triangle ABC est rectangle en A ».
- Par contre, la réciproque de la propriété « Si x et y sont des entiers pairs alors la somme $x+y$ est paire » est fausse.

  La réciproque est : « Si $x+y$ est un entier pair alors x et y sont des entiers pairs ». En prenant $x=3$ et $y=5$, on voit que cela ne convient pas : la somme est paire sans pour autant que les nombres le soient.

Définition 2.3

Avec la propriété : « Si P alors Q », on dit que la **contraposée** est : « Si non Q alors non P ».

Propriété 2.2

Une propriété et sa contraposée sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses. Autrement dit, mathématiquement, elles sont similaires.

EXEMPLES

- La contraposée de : « Si je suis un être humain alors je suis mortel » est : « Si je ne suis pas mortel alors je ne suis pas un être humain ». Elles sont similaires.
- La contraposée du théorème 2.1 est : Si $AB^2+AC^2 \neq BC^2$ alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

  Cette contraposée, vous l'avez utilisée au collège afin de montrer qu'un triangle n'était pas rectangle en un certain point.

Définition 2.4

Si une propriété « Si P alors Q » est vraie ou fausse en même temps que sa réciproque, on dit que les propositions P et Q sont équivalentes. P est une **condition nécessaire et suffisante**.

EXEMPLE

Le théorème de Pythagore et sa réciproque sont vraies. On peut donc dire que « le triangle ABC est rectangle en A » et « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » sont équivalentes.

Par contre, la réciproque de « Si je suis un être humain alors je suis mortel » est « Si je suis mortel alors je suis un être humain » est fausse. Je pourrais être un animal, un végétal…

3 RAISONNEMENT DANS LES DÉMONSTRATIONS

- **Pour démontrer une équivalence :**

  Pour démontrer que les propositions P et Q sont équivalentes, on peut agir en deux temps. On montre d'un côté que P implique Q et d'autre part, que Q implique P.

  Parfois, on arrive à raisonner par équivalence en partant de P pour arriver par logique à Q.

- **Pour démontrer qu'une propriété est fausse :**

  On peut raisonner avec un contre-exemple.

  ### EXEMPLE

  Si je souhaite montrer que la propriété : « Pour tout nombre réel x, $x^2+1=(x+1)^2$ » est fausse, il suffit que je trouve un réel x pour lequel l'égalité ne soit pas vérifiée.

  Je peux essayer avec $x=6$. On a : $6^2+1=37$ et $(6+1)^2=49$. D'où la propriété est fausse.

- **Pour démontrer qu'une propriété est vraie, on peut montrer que sa contraposée est vraie (elles sont similaires) :**

  Vous l'avez utilisé avec par exemple, le théorème de Pythagore. Sa contraposée est : « Si on a : $AB^2+AC^2 \neq BC^2$ **alors** le triangle ABC n'est pas rectangle en A ».

- **Pour démontrer une propriété, on peut raisonner par disjonction des cas :**

  Le principe avec un exemple simple. Je souhaite démontrer la propriété « Pour tout entier naturel n, le nombre $n(n+1)$ est pair ».

  Démontrer cette propriété pour tous les entiers paraît long, très long. On peut donc « dispatcher » suivant une caractéristique de n, sa parité par exemple. On peut montrer que la propriété est vraie quand n est pair d'une part, puis quand n est impair d'autre part.

- **Pour démontrer une propriété, on peut raisonner par l'absurde :**

  L'exemple très connu est le suivant (il sera démontré dans le chapitre I) :

  « $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel ».